
سلسلة جنى
في الرياضيات
هندسة و حساب المثلثات
الصف / الثالث الاعدادى
إعداد المهندسة / جنى أحمد
جروب يلا نذاكر رياضيات سوا
RUBBER

الدرس الأول

مهندسة : جنى أحمد

البعد بين نقطتين

درس اليوم سهل خالص قانون وأحد بس أحفظه كويس جدا
وهنفتكر مع بعض شوية حاجات وهنطبق على الدرس بس كدة

تعالوا نشوف إزاى نجيب البعد بين أ ، ب

عندى النقطة أ = (١ ، ٥) ب = (٦ ، ٢) أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

القانون

البعد بين أى نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

$= \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

البعد بين أ ، ب أو طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{(١ - ٦)^٢ + (٥ - ٢)^٢}$ = $\sqrt{(-٥)^٢ + (٣)^٢}$

= $\sqrt{٢٥ + ٩}$ = $\sqrt{٣٤}$ ≃ ٥,٨٣ وحدة طول

مثال أوجد البعد بين (-٣ ، ٤) ونقطة الأصل ← (٠ ، ٠)

الحل

البعد بين النقطتين = $\sqrt{(-٣ - ٠)^٢ + (٤ - ٠)^٢}$ = $\sqrt{(-٣)^٢ + ٤^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$

= $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

سهل خالص

مثال إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة

فإن أ = ...

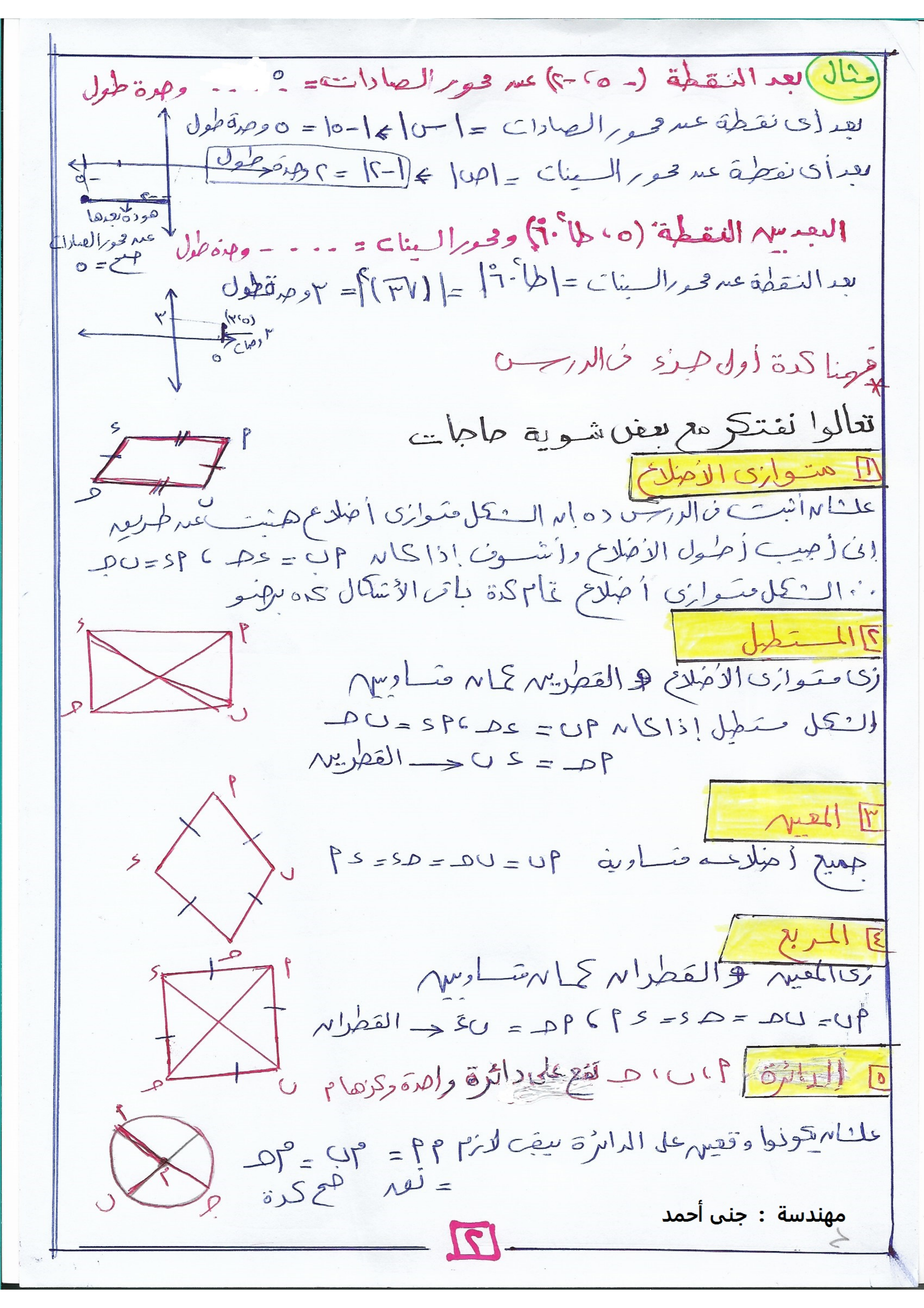
الحل

هنا بقى هنعمل إيه معطى العكس البعد = ١ وحدة طول عادى خالص
هنكتب برضو القانون ونعوض ونشوف أ

البعد بين النقطتين = $\sqrt{(أ - ٠)^٢ + (٠ - ١)^٢}$ = $\sqrt{أ^٢ + ١}$

١ = $\sqrt{أ^٢ + ١}$ ← بتربيع الطرفين

∴ ١^٢ = أ^٢ + ١ ← أ^٢ = ١ - ١ ← **أ = صفر**



مثال بعد النقطة (-٥، -٢) عن محور الصادات = ... وحدة طول

بعد أى نقطة عن محور الصادات = |س| ← |-٥| = ٥ وحدة طول

بعد أى نقطة عن محور السينات = |ص| ← |-٢| = ٢ وحدة طول

البعد بين النقطة (٥، ظا ٦٠°) ومحور السينات = ... وحدة طول

بعد النقطة عن محور السينات = |ظا ٦٠°| = |(√٣)|² = ٣ وحدة طول

قرينا كدة أول جزء فى الدرس

تعالوا نفتكر مع بعض شوية حاجات

١ متوازى الأضلاع

علشان أثبت فى الدرس ده إن الشكل متوازى أضلاع هثبت عن طريق إنى أجيب أطوال الأضلاع وأشوف إذا كان أب = دجـ ، أد = بجـ

∴ الشكل متوازى أضلاع تمام كدة باقى الأشكال كده برضو

٢ المستطيل

زى متوازى الأضلاع + القطرين كمان متساويين

الشكل مستطيل إذا كان أب = دجـ ، أد = بجـ

أجـ = د ب ← القطرين

٣ المعين

جميع أضلاعه متساوية أب = بجـ = جـد = دأ

٤ المربع

زى المعين + القطران كمان متساويين

أب = بجـ = جـد = دأ ، أجـ = بد ← القطران

٥ الدائرة

أ ، ب ، جـ تقع على دائرة واحدة وكزها م

علشان يكونوا واقعين على الدائرة يبقى لازم م أ = م ب = م جـ = نق صح كدة

مهندسة : جنى أحمد

٦ المثلث

فاكرين متباينة المثلث (مجموع أي ضلعين > الضلع الثالث)

أ ب + ب جـ > أ جـ ← لو عايز أثبت أ، ب، جـ رؤوس مثلث

طيب إزاي أعرف نوع المثلث بالنسبة لزواياه (فرض أ جـ أطول أضلاع المثلث)

① (أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)² ← كان المثلث قائم الزاوية (ب)

② (أ جـ)² < (أ ب)² + (ب جـ)² كان المثلث حاد الزوايا

③ (أ جـ)² > (أ ب)² + (ب جـ)² المثلث منفرج الزاوية في ب

٧ ثلاث نقاط على استقامة واحدة أ، ب، جـ

إذا كان أ ب + ب جـ = أ جـ صح (أشوف أكبر ضلع = مجموع الضلعين الآخرين)

تعالوا نطبقه على الكلام ده

مثال: أثبت أن النقط أ (٤، ٣) ، ب (١، ١) ، جـ (-٥، -٣) تقع على استقامة واحدة

مهندسة : جنى أحمد

الحل

على استقامة واحدة إذا كان أكبر ضلع = مجموع الضلعين الآخرين تمام

أ ب = √((٤-١)² + (٣-١)²) = √(٩ + ٤) = √١٣ وحدة طول

ب جـ = √((١-(-٥))² + (١-(-٣))²) = √((١+٥)² + (١+٣)²) = √(٣٦ + ١٦) = √٥٢ = ٢√١٣ وحدة طول

أ جـ = √((٤-(-٥))² + (٣-(-٣))²) = √((٤+٥)² + (٣+٣)²) = √(٨١ + ٣٦) = √١١٧ = ٣√١٣ وحدة طول

أ جـ ← أكبر ضلع ∴ أ جـ = أ ب + ب جـ

∴ أ، ب، جـ على استقامة واحدة

مثال: بين نوع المثلث أ ب جـ حيث أ (-٢، ٤) ، ب (٣، -١) ، جـ (٤، ٥) بالنسبة لأطوال أضلاعه

الحل

∵ أ ب = √((-٢-٣)² + (٤+١)²) = √(٢٥ + ٢٥) = √٥٠ = ٥√٢ وحدة طول

ب جـ = √((٣-٤)² + (-١-٥)²) = √(١ + ٣٦) = √٣٧ وحدة طول

أ جـ = √((-٢-٤)² + (٤-٥)²) = √(٣٦ + ١) = √٣٧ وحدة طول

∵ ب جـ = أ جـ ← ∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

هنا بقارن بين الأضلاع أخذ بالي (ممكن يكون متساوي الأضلاع أو مختلف الأضلاع أو متساوي الساقين)

مثال اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥، -٥) ب (-١، ٧) ج (١٥، ١٥) قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحته

مهندسة : جنى أحمد

الحل

هجيب الأول أطوال الأضلاع وأثبت أن (أ ج)² = (أب)² + (ب ج)²

أب = $\sqrt{(٥+١)^2 + (-٥-٧)^2}$ = $\sqrt{٣٦+١٤٤}$ = $\sqrt{١٨٠}$ وحدة طول ← (أب)² = ١٨٠

ب ج = $\sqrt{(-١-١٥)^2 + (٧-١٥)^2}$ = $\sqrt{٢٥٦+٦٤}$ = $\sqrt{٣٢٠}$ وحدة طول ← (ب ج)² = ٣٢٠

أ ج = $\sqrt{(٥-١٥)^2 + (-٥-١٥)^2}$ = $\sqrt{١٠٠+٤٠٠}$ = $\sqrt{٥٠٠}$ وحدة طول ← (أ ج)² = ٥٠٠

∵ (أ ج)² = (أب)² + (ب ج)² ∴ المثلث أ ب ج قائم فى ب

مساحة △ = $\frac{١}{٢}$ × أب × ب ج = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{١٨٠}$ × $\sqrt{٣٢٠}$ = ١٢٠ وحدة مربعة

مثال أثبت أن النقط أ (٣، -١) ب (-٤، ٦) ج (٢، -٢) تقع على دائرة واحدة مركزها م (-١، ٢) ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة حيث π = ٣,١٤

الحل

علشان أثبت أنهم على الدائرة بس لازم أثبت م أ = م ب = م ج = نق

∵ م أ = $\sqrt{(٣+١)^2 + (-١-٢)^2}$ = $\sqrt{١٦+٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

م ب = $\sqrt{(-٤+١)^2 + (٦-٢)^2}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

م ج = $\sqrt{(٢+١)^2 + (-٢-٢)^2}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ م أ = م ب = م ج ∴ أ، ب، ج تقع على الدائرة م وطول نصف قطرها = ٥ وحدة طول

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٣١,٤ وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق² = ٣,١٤ × (٥)² = ٧٨,٥ وحدة مربعة

مثال أثبت أن النقط أ (-١، ١) ب (٠، ٥) ج (٥، ٦) د (٤، ٢) رؤوس متوازى أضلاع

الحل

لازم أثبت أن أ ب = د ج ، أ د = ب ج

جرب أنت كدة

مثال أثبت أن النقط أ (٣، ٣) ب (٠، ٣) ج (٠، ٠) د (٣، ٠) هي رؤوس مربع وأوجد طول قطره ومساحته

الحل

عشان أثبت مربع لازم أب = ب ج = ج د = د أ
تمام أ ج = ب د

أب = $\sqrt{(٣-٠)^{٢} + (٣-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+٠}$ = ٣ وحدة طول

ب ج = $\sqrt{(٠-٠)^{٢} + (٣-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٠+٩}$ = ٣ وحدة طول

ج د = $\sqrt{(٠-٣)^{٢} + (٠-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+٠}$ = ٣ وحدة طول

د أ = $\sqrt{(٣-٣)^{٢} + (٣-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٠+٩}$ = ٣ وحدة طول

أ ج = $\sqrt{(٣-٠)^{٢} + (٣-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+٩}$ = $٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

ب د = $\sqrt{(٠-٣)^{٢} + (٣-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+٩}$ = $٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

∵ أب = ب ج = ج د = د أ ، أ ج = ب د

∴ الشكل أ ب ج د مربع وطول قطره = $٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

مساحته = مربع طول ضلعه = $(٣)^{٢}$ = ٩ وحدة مربعة

مثال إذا كان محور تماثل ج د يمر بالنقطة أ (٦، م) حيث ج (٣، ١) ، د (−٣، ٧) أوجد قيمة م

الحل

محور التماثل يقسم القطعة المستقيمة إلى جزئين متساويين
وأي نقطة على محور التماثل تكون على بعدين متساويين من طرفيها

∴ ج أ = أ د

ج أ = $\sqrt{(٦-٣)^{٢} + (م-١)^{٢}}$

مهندسة : جنى أحمد

أ د = $\sqrt{(٦+٣)^{٢} + (م-٧)^{٢}}$

∴ $\sqrt{(٦-٣)^{٢} + (م-١)^{٢}}$ = $\sqrt{(٦+٣)^{٢} + (م-٧)^{٢}}$ بتربيع الطرفين

$٣^{٢} + (م-١)^{٢} = ٩^{٢} + (م-٧)^{٢}$ ←

٩ + م² − ٢م + ١ = ٨١ + م² − ١٤م + ٤٩ ← −٢م + ١٤م = ٨١ + ٤٩ − ٩ − ١

خليت م في طرف والأرقام في طرف

١٢م = ١٢٠ ← م = $\frac{١٢٠}{١٢}$ = ١٠

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

أخذنا الدرس السابق إزاي أجيب طول $\overline{أب}$

بالقانون $\sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$ صح كدة

النهاردة هناخد إزاي أجيب النقطة اللي في منتصف $\overline{أب}$

عندي النقطة أ $(س_1، ص_1)$ والنقطة ب $(س_2، ص_2)$

د منتصف $\overline{أب}$ يبقى د = ؟؟؟

قانون سهل جدًا د = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{2}، \frac{\text{مجموع الصادات}}{2}\right) = \left(\frac{س_1 + س_2}{2}، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

تعالوا نشوف أمثلة

مثال أوجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{أب}$ أ(2، 4) ، ب(6، صفر)

الحل

نفرض إن د هي نقطة منتصف $\overline{أب}$

$\therefore$ د = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{2}، \frac{\text{مجموع الصادات}}{2}\right) = \left(\frac{2+6}{2}، \frac{4+\text{صفر}}{2}\right) = (4، 2)$

تمام كدة

مثال إذا كانت النقطة (س، ص) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(1، -5)، ب(2، 5)

فأوجد قيمة س

الحل

أيه ده لقت مليش فيه هكتب القانون وأعوض

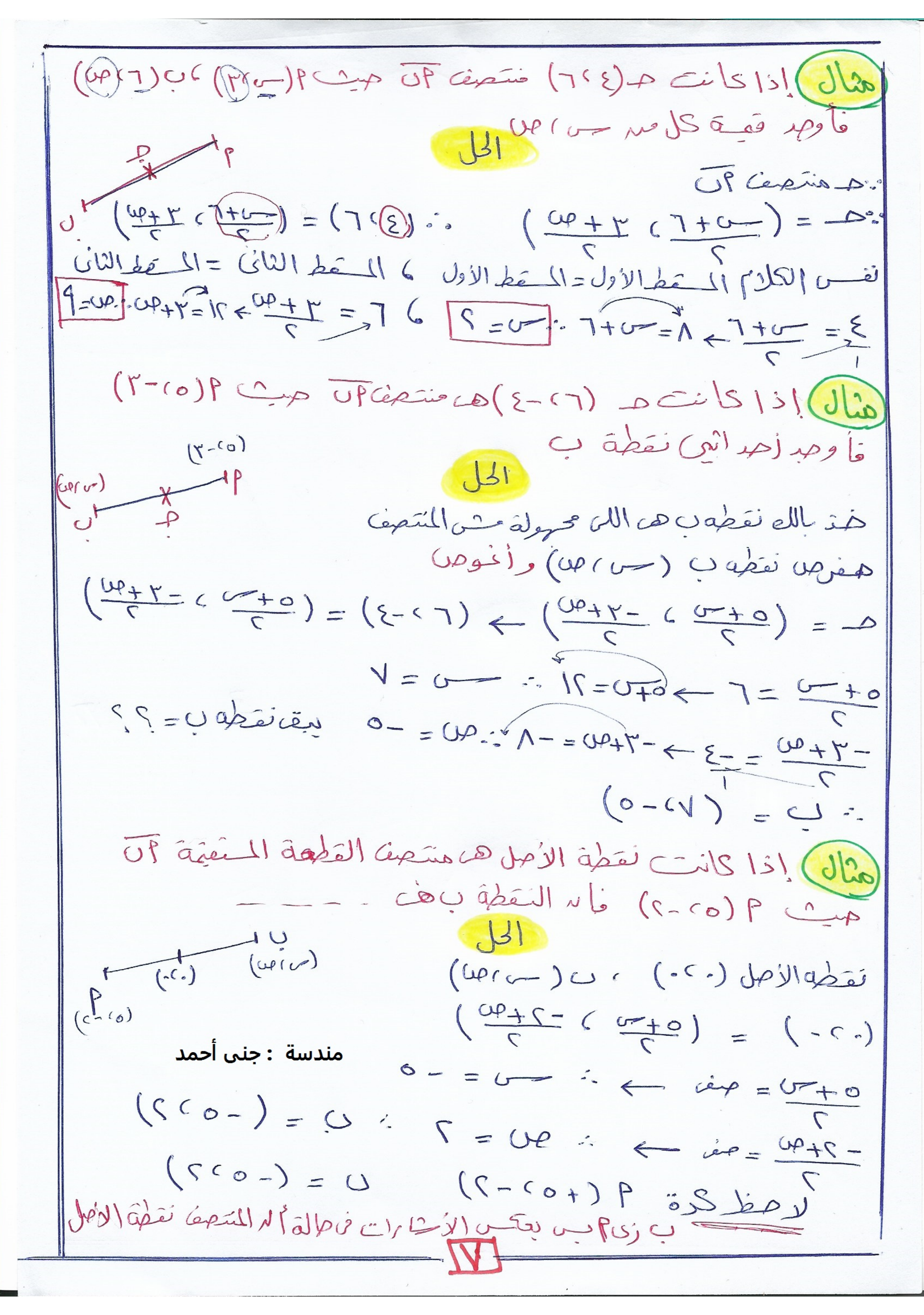
نقطة المنتصف = (س، ص) تمام

$\therefore$ (س، ص) = $\left(\frac{1+2}{2}، \frac{-5+5}{2}\right) \leftarrow$ (س، ص) = $\left(\frac{3}{2}، \text{صفر}\right)$

المسقط الأول = المسقط الأول فاكرين

س = $\frac{3}{2}$

مهندسة : جنى أحمد



مثال إذا كانت حـ(٤، ٦) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س، ٣)، ب(٦، ص) فأوجد قيمة كل من س، ص

الحل

∵ حـ منتصف $\overline{أب}$

∴ حـ = $\left(\frac{س+٦}{٢} ، \frac{٣+ص}{٢}\right)$ ∴ (٤، ٦) = $\left(\frac{س+٦}{٢} ، \frac{٣+ص}{٢}\right)$

نفس الكلام المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

$\frac{٤}{١} = \frac{س+٦}{٢}$ ← س + ٦ = ٨ ∴ **س = ٢** ، ٦ = $\frac{٣+ص}{٢}$ ← ٣ + ص = ١٢ ∴ **ص = ٩**

مثال إذا كانت حـ (٦، -٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٥، -٣) فأوجد إحداثي نقطة ب

الحل

خد بالك نقطة ب هي اللي مجهولة مش المنتصف

هفرض نقطة ب (س، ص) وأعوض

حـ = $\left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{-٣+ص}{٢}\right)$ ← (٦، -٤) = $\left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{-٣+ص}{٢}\right)$

$\frac{٥+س}{٢} = ٦$ ← ٥ + س = ١٢ ∴ س = ٧

$\frac{-٣+ص}{٢} = \frac{-٤}{١}$ ← -٣ + ص = -٨ ∴ ص = -٥ يبقى نقطة ب = ؟؟

∴ ب = (٧، -٥)

مثال إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ(٥، -٢) فإن النقطة ب هي ــــــــ

الحل

نقطة الأصل (٠، ٠) ، ب (س، ص)

(٠، ٠) = $\left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{-٢+ص}{٢}\right)$

$\frac{٥+س}{٢}$ = صفر ← ∴ س = -٥

$\frac{-٢+ص}{٢}$ = صفر ← ∴ ص = ٢ ∴ ب = (-٥، ٢)

ب = (-٥، ٢)

لاحظ كدة أ (+٥، -٢)

ب زي أ بس بعكس الإشارات في حالة أن المنتصف نقطة الأصل

مندسة : جنى أحمد

مثال $\overline{اب}$ قطر في دائرة مركزها م إذا كانت ب (٨، ١١) م (٥، ٧) فأوجد إحداثي أ ، محيط الدائرة حيث ط = ٣٫١٤

الحل

* عندي إذا كان $\overline{اب}$ قطر في الدائرة ∴ م هي نقطة منتصف القطر ، هفرض أ (س، ص) ب (٨، ١١)

م (٥، ٧) = ((س + ٨)/٢ ، (ص + ١١)/٢) ← (س + ٨)/٢ = ٥ ← س + ٨ = ١٠

س = ٢ ، (ص + ١١)/٢ = ٧ ∴ ص + ١١ = ١٤ ∴ ص = ٣

أ = (٢، ٣)

هات أنت محيط الدائرة زي الدرس السابق

هات نق ← وبعدين المحيط

مثال في الشكل المقابل حـ (٣، ٤) منتصف $\overline{اب}$ أوجد محيط △ و ا ب

الحل

إزاي هجيب محيط المثلث لازم أعرف طول $\overline{وا}$ ، $\overline{وب}$ ، $\overline{اب}$ ، حـ (٣، ٤)

أ (س، صفر) صح لأنها على محور السينات بيبقى الص = صفر

ب (صفر، ص) لأنها على محور الصادات بيبقى الس = صفر

تمام عندي حـ منتصف $\overline{اب}$ ∴ (٣، ٤) = ((س + صفر)/٢ ، (ص + صفر)/٢)

(س + صفر)/٢ = ٣ ← س + صفر = ٦ ∴ س = ٦

(ص + صفر)/٢ = ٤ ← ص + صفر = ٨ ص = ٨

أ = (٦، صفر) ب = (صفر، ٨)

∴ طول $\overline{وا}$ = ٦ وحدة طول ، طول $\overline{وب}$ = ٨ وحدة طول

∴ طول $\overline{اب}$ = $\sqrt{(٦ - صفر)^٢ + (صفر - ٨)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠ وحدة طول

أو ممكن $(اب)^٢ = (وب)^٢ + (وا)^٢$ ← فيثاغورث

∴ محيط △ و ا ب = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ وحدة طول

مهندسة : جنى أحمد

ملاحظة

* أهم إزاي أثبت إن الشكل متوازي أضلاع

قولنا عن طريق الأضلاع اب = دحـ ، اد = بحـ

* ممكن كمان نثبت بدرس النهاردة

عن طريق القطرين ينصف كل منهما الآخر

نجيب منتصف احـ ، منتصف بد هلاقيهم نفس النقطة

مثال

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه أ(٣، ٢) ب(٤، -٥) حـ(٠، -٣) أوجد احداثي نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد احداثي نقطة ء

الحل

في متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر

نفرض أن م هي نقطة تقاطع القطرين

م منتصف $\overline{أحـ}$ ، م أيضا منتصف $\overline{ب ء}$

عندي أ ، حـ ممكن أعرف أجيب منهم م   أ(٣، ٢) حـ(٠، -٣)

م = ((٣+٠)/٢ ، (٢-٣)/٢) = (٣/٢ ، -١/٢)

∴ نقطة تقاطع القطرين (٣/٢ ، -١/٢) ← أول مطلوب

م منتصف $\overline{ب ء}$ ← نفرض أن ء (س، ص)   ب(٤، -٥)

(٣/٢ ، -١/٢) = ((س+٤)/٢ ، (ص-٥)/٢)

٣/٢ = (س+٤)/٢ ← س + ٤ = ٣   ∴ س = -١

(ص-٥)/٢ = -١/٢ ← ص - ٥ = -١   ∴ ص = ٤

∴ ء = (-١، ٤)   ثاني مطلوب

مثال

أثبت أن النقط أ(-٣، ٠) ب(٣، ٤) حـ(١، -٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{ب حـ}$

الحل

سهل أثبت أنه △ متساوي الساقين من الدرس السابق أب = أحـ

أثبت أنت

بعد كدة عايز طول $\overline{أء}$ لازم الأول يكون عندي ء

مهندسة : جنى احمد

∵ △ أ ب حـ متساوي الساقين ، $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

∴ ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ ء = ((٣+١)/٢ ، (٤-٦)/٢) = (٢، -١)

∴ أء = √((٢+٣)² + (-١-٠)²) = √٢٦ وحدة طول

ممكن بدل المطلوب الثاني يكون أوجد مساحة △ أ ب حـ

الدرس الثالث

ميل الخط المستقيم

أخدنا قبل كده ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه فاكرين

لو عندى أ $(س_1 ، ص_1)$ ب $(س_2 ، ص_2)$ يبقى ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

$$= \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} \text{ أو } = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

اليوم هناخد إزاى أجيب ميل الخط المستقيم بمعلومية الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

لو فرضنا إن الزاوية دى أسميها هـ

أقدر أقول إن الميل هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = ظا هـ

عندى ٤ حالات للميل

① **الميل موجب**: إذا كانت هـ زاوية حادة

② **الميل سالب**: إذا كانت هـ زاوية منفرجة

③ **الميل صفر**: إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

④ **الميل غير معرف**: إذا كان المستقيم يوازى محور الصادات

* القياس الموجب والقياس السالب للزاوية

عندى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أب}$ يصنع زاوية موجبة مع محور السينات وزاوية أخرى سالبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

مع اتجاه عقارب الساعة سالب

عكس اتجاه عقارب الساعة موجب

تعالوا نشوف أمثلة

مهندسة / إسراء أحمد

مثال أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (-١، ٣) ، ب (٢، ٥)

الحل

مهندس / إسراء أحمد

الميل = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{5-3}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$

مثال أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ① ٣٠° ② ٩٠° ③ ١٢٠° ④ صفر

الحل

٣٠° ← ميل = ظا ٣٠° ← الميل = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ → الميل موجب لأن الزاوية حادة

٩٠° ← الميل = ظا ٩٠° ← غير معرف → يوازى محور الصادات أو عمودى على السينات

١٢٠° ← الميل = ظا ١٢٠° = $-\sqrt{3}$ → الميل سالب لأن الزاوية منفرجة

صفر ← الميل = ظا صفر = صفر → محور السينات أو يوازى محور السينات

مثال باستخدام الآلة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى كل من الحالات الآتية

① م = ٠٫٣٦٧٣ ② م = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

الحل

عندما م = ٠٫٣٦٧٣

الميل = ظا هـ ← ٠٫٣٦٧٣ = ظا هـ

shift tan 0.3673 = 20.168... = 20° 10' 5.82"

∴ قياس الزاوية الموجبة = ٢٠° ١٠' ٦" قربت الثوانى

م = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ = ظا هـ

shift tan $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ = −30°

هـ = −٣٠° بس أنا عايز الزاوية الموجبة

مش السالبة هجيبها إزاى

لو طلعت الزاوية سالبة أعمل كده → ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

كده تمام لأن الميل سالب يبقى الزاوية منفرجة

الآلة مش بتعرف تجيب غير الزاوية الحادة فقط سواء الموجبة أو السالبة

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

* إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متوازيين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ فإن $م_١ = م_٢$ والعكس صحيح ← $م_١ - م_٢ =$ صفر

* إذا كان $م_١ = م_٢$ فإن $ل_١ // ل_٢$

مثال إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متوازيين فإن ك = ...

الحل

∵ المستقيمان متوازيين ∴ $م_١ = م_٢$ ومنها هقدر أجيب ك

$\frac{-٢}{٣} = \frac{ك}{٢}$ ← $ك = \frac{-٢ \times ٢}{٣} = \frac{-٤}{٣}$

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

* إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متعامدين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن $م_١ \times م_٢ = -١$ والعكس صحيح

مهندسة/ إيناس أحمد

* إذا كان $م_١ \times م_٢ = -١$ فإن $ل_١ \perp ل_٢$

مثال إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلي مستقيمين متعامدين ، $م_١ = ٠٫٧٥$ فإن $م_٢$ = ...

الحل

مستقيمين متعامدين ← $م_١ \times م_٢ = -١$ أعوض

$٠٫٧٥ \times م_٢ = -١$ ← $م_٢ = \frac{-١}{٠٫٧٥} = \frac{-٤}{٣}$

مثال أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (-٣، ٤) ، جـ (-٣، -٢) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢) ، د (-٣، ٢)

الحل

هنا هعمل إيه؟ هجيب ميل المستقيم الأول وميل التاني وبعدين أضرب $م_١ \times م_٢$ لو طلع -١ يبقى كده المستقيمين متعامدين

① ميل المستقيم المار بـ أ، جـ = $\frac{-٢ - ٤}{-٣ - (-٣)} = \frac{-٦}{صفر}$ ← غير معرف يوازي محور الصادات

② ميل المستقيم $\overleftrightarrow{بد}$ = $\frac{٢ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{صفر}{-٤} =$ صفر ← يوازي محور السينات

∴ $\overleftrightarrow{أجـ} \perp \overleftrightarrow{بد}$

ص، س

مثال أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١-) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

هجيب ميل الأول وميل الثانى

توازى يعنى $م_١ = م_٢$

$م_١$ ميل المستقيم المار (٢ ، ١-) ، (٦ ، ٣) $= \frac{٣ - ١-}{٦ - ٢} = ١$

$م_٢ =$ ظا ٤٥ $= ١$

مهندسة / ضحى أحمد

∴ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات حيث أ(س ، ٧) ، ب(٣ ، ٥) أوجد قيمة س

الحل

ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ غير معرف $م = \frac{٥ - ٧}{٣ - س}$

غير معرف يعنى المقام = صفر

٣ - س = صفر ← ∴ س = ٣

مثال إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ ① متوازيين ② متعامدين

الحل

① إذا كان $ل_١$ // $ل_٢$ ← $م_١ = م_٢$

∵ $م_١ = \frac{ك - ١}{٢ - ٣} =$ ظا ٤٥ ($م_٢$) ← $\frac{ك - ١}{١-} = ١$ ∴ ك - ١ = -١

ك = صفر

② إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ ← $م_١ \times م_٢ = -١$

$م_١ = \frac{ك - ١}{٢ - ٣}$ ، $م_٢ =$ ظا ٤٥ $= ١$

∴ $\frac{ك - ١}{١-} \times ١ = \frac{١-}{١}$ ← ك - ١ = ١

∴ ك = ٢

الأشكال الهندسية

(١) أثبت أن النقط أ (١،١) ب (٢،٣) جـ (٠،-١) تقع على استقامة واحدة

الحل

① طريقة الأطوال (البعد) راجع عليها أول درس هندسة

أب + ب جـ = أ جـ

② طريقة الميل علشان أ ، ب ، جـ يكونوا على استقامة

لازم ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ أو أثبت ٢ بس ميل أب = ميل ب جـ

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣-١}{٢-١}$ = ٢

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{-١-٣}{٠-٢}$ = $\frac{-٤}{-٢}$ = ٢

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

(٢) أثبت أن △ أ ب جـ قائم في ب إذا كان أ (-١،-١) ب (٢،٣) جـ (٦،٠)

الحل

① طريقة البعد أول درس

$(أب)^٢ + (ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢$

② طريقة الميل $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$ عن طريق ميل أب × ميل ب جـ = -١

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ($م_١$) = $\frac{٣+١}{٢+١}$ = $\frac{٤}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ($م_٢$) = $\frac{٠-٣}{٦-٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ $م_١ \times م_٢$ = $\frac{٤}{٣} \times \frac{-٣}{٤}$ = -١ ∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ △ أ ب جـ قائم في ب

(٣) متوازي الأضلاع

① عن طريق البعد أد = ب جـ ، أب = د جـ أول درس

② عن طريق القطران ينصف كل منهما الآخر م منتصف $\overline{أ جـ}$ ، م منتصف $\overline{ب د}$ الدرس الثاني منتصف القطعة المستقيمة

③ عن طريق الميل كل ضلعين متقابلين متوازيين

ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$

أ (-١،١) ب (٠،٥) جـ (٤،٢) د (٥،٦) أثبت أن أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٥-١}{٠+١}$ = ٤ ، ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$ = $\frac{٦-٢}{٥-٤}$ = ٤

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{د جـ}$ ①

ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ = $\frac{٢-١}{٤+١}$ = $\frac{١}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = $\frac{٦-٥}{٥-٠}$ = $\frac{١}{٥}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ ∴ $\overleftrightarrow{أ جـ} \parallel \overleftrightarrow{ب د}$ ②

من ① ، ② ينتج أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

٤ المستطيل

١ عن طريق الأضلاع (البعد) الدرس الأول

أب = جـ د ، ب جـ = أ د ، والقطران متساويان

أ جـ = ب د

٢ عن طريق الميل

كل ضلعين متقابلين متوازيين + ضلعين متجاورين متعامدان

يعني ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$ ← كدة التوازي

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = -١ ← ضلعان متجاوران متعامدان

٥ المعين

١ عن طريق الأضلاع (البعد) الدرس الأول

أب = ب جـ = جـ د = د أ

٢ عن طريق الميل أثبت توازي الأضلاع + القطران متعامدان

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{أد}$

ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = -١

مهندسة / أ. أحمد

٦ المربع

١ عن طريق الأضلاع متساوية + القطران متساويان

أب = ب جـ = جـ د = د أ ، أ جـ = ب د

٢ عن طريق الميل أثبت توازي الأضلاع + ضلعان متجاوران متعامدان + القطران متعامدان

زي المستطيل بـ القطران متعامدان كمان

ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = -١ ، ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = -١

٧ شبه المنحرف

هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان فقط

يعني عن طريق الميل أثبت التوازي

ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ بس كدة

الحل

① إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{1}{2}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ... -٢

الطول علشان أجيب الميل الثاني أشقلب الأول وأغير إشارته

$م_1 = \frac{1}{2} \leftarrow م_2 = \frac{-2}{1}$

② $\triangle$ أب جـ قائم في ب فيه أ = (١،٢) ، ب = (٠،١) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = ...

∵ $\triangle$ أب جـ قائم في ب ∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$

كمل أنت الباقي

③ أب جـ د متوازي أضلاع حيث أ (-١،٤) ب (٠،١) فإن ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$ = ...

متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$

ميل أب = $\frac{1-4}{0+1}$ = -٣ ∴ ميل $\overleftrightarrow{د جـ}$ = -٣

④ إذا كان أب جـ د مربعاً قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب د}$ حيث أ (٣،٥)

جـ (٥،-١) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = ...

قطرا المربع متعامدين ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب د}$ = -١

ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ = $\frac{-1-5}{5-3}$ = $\frac{-6}{2}$ = -٣ ∴ ميل ب د = $\frac{1}{3}$

أشقلب وأغير الإشارة

⑤ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ يوازي محور الصادات حيث جـ (م،٤)

د (-٥،٧) فإن م = ... جرب تحلها

مثال أثبت أن النقط أ (-١،١) ، ب (٢،٣) جـ (٦،٠)

د (٣،-٤) هي رؤوس مربع

الحل

أجب بنفسك

مثال في الشكل المقابل أب جـ د شبه منحرف $\overline{أب} // \overline{هـ د}$

أ (٤،-٢) هـ (٢،٣) جـ (س،ص) ، د (٤،-٣)

أوجد إحداثي نقطة أ

الحل

∵ $\overline{جـ د} // \overline{ب أ}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ميل ب أ

أكمل الحل

الحمد لله
الدرس خلص

الدرس الرابع

معادلة الخط المستقيم

فاكرين أخذ السنة الماضية إزاى إرسم العلاقة دى

$م س + ن ص + حـ = صفر$ ← ودى كانت بترسم لخط مستقيم

وكنت بعرف أجيب نقط التقاطع مع محورى الاحداثيات

تمام اليوم هناخد ① إزاى أجيب الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

② إزاى لو عندى نقطة و الميل أعرف أجيب المعادلة نفل من معادلة الخط المستقيم

تعالوا نشوف الشرح

① ايجاد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كانت المعادلة على صورة $ص = م س + حـ$

فإن الميل هو $م$ ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات $= |حـ|$

لازم يبقى موجب علشان طول

مثال أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات $ص = ٥س - ٣$

الحل

$ص = م س + حـ$ هنا $ص = ٥س - ٣$

$\therefore م = ٥$ ، $حـ = -٣$ بس أنا عايز طول يبقى لازم موجب

$\therefore$ الميل $= ٥$ ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات $= |-٣| = ٣$ وحدة طول

مثال أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات $\frac{س}{٢} + ٣ص = ٦$

الحل

$\frac{س}{٢} + ٣ص = ٦$ ← هخلى ص لوحدها $٣ص = \frac{-س}{٢} + ٦$ $÷ ٣$

$ص = \frac{-س}{٦} + ٢$ كدة بقت على صورة $ص = م س + حـ$

$\therefore$ الميل $= \frac{-١}{٦}$ ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات $= ٢$ وحدة طول

خلاصة أول جزء

لو كانت المعادلة على صورة $ص = م س + حـ$

الميل $= م$ ، طول الجزء المقطوع من محور الصادات $= |حـ|$

إما $م س + ن ص \pm حـ$

الميل $= \frac{- معامل س}{معامل ص} = \frac{-م}{ن}$

طول الجزء المقطوع $= \left|\frac{حـ}{ن}\right|$

مثال $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢} \div \frac{١}{٣} = \frac{-١}{٢} \times ٣ = \frac{-٣}{٢}$

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{ح}{\text{معامل ص}}\right| = \left|١ \div \frac{١}{٣}\right| = |١ \times ٣| = ٣$

كده الجزء ده تمام تعالوا نشوف تانى جزء

٢) إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

هنا نقب العكس معطى الميل وطول الجزء المقطوع وعايز المعادلة سهل جداً أنا عندى صورة المعادلة ص = م س + ح أعوض

مثال أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات

الحل

م = ٢ ، ح = ٧

∵ ص = م س + ح ∴ **ص = ٢ س + ٧** تمام

② ميله $\frac{-٣}{٤}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات $٢\frac{١}{٢}$ وحدة

الحل

م = $\frac{-٣}{٢}$ أخد بالى بقى من نقطة قال يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات يبقى كدة ح = سالب تمام

ح = $-٢\frac{١}{٢}$ ∵ ص = م س + ح

∴ **ص = $\frac{-٣}{٢}$ س $- ٢\frac{١}{٢}$**

③ ميله $\frac{-١}{٣}$ ويمر بالنقطة (٠، ٢)

الحل

م = $\frac{-١}{٣}$ يمر بالنقطة (٠، ٢) يبقى ح = ٢ ← الصادات

← لأن س = صفر يبقى دى نقطة تقاطعه مع محور الصادات

ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ح

* ممكن يصعبها شوية وبحيث الميل ميكونش معطى مباشر أجيبه أنا الأول وبعدين أعوض بيه

مثال أوجد معادلة الخط المستقيم ① المار بنقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

الحل

هنا الميل مش مباشر يبقى هجيبه م = ظاهـ ∴ م = ظا ١٣٥ = -١

يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) منها طول الجزء المقطوع = صفر

∴ ص = م س + جـ ← ∴ ص = - س

② المار بالنقطة (٣ ، ٢) ، هـ = ٤٥°

الحل

الميل = ظاهـ = ظا ٤٥ = ١ كدة جبت الميل

هنا النقطة ملهاش علاقة بمحور الصادات يبقى هعمل ايه ،

ص = م س + جـ ← ص = ١ س + جـ (٣ ، ٢) ∈ الخط المستقيم

يبقى أعوض بيها وأطلع قيمة جـ

٢ = ١ × ٣ + جـ ← ٢ = ٣ + جـ ∴ جـ = -١

ص = س - ١

خلاصة الجزء ده

علشان نجيب المعادلة لازم يكون عندي ① الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات أو ② الميل وأي نقطة ∈ الخط المستقيم

ولو مش معطى مباشرة الميل نجيبه الأول

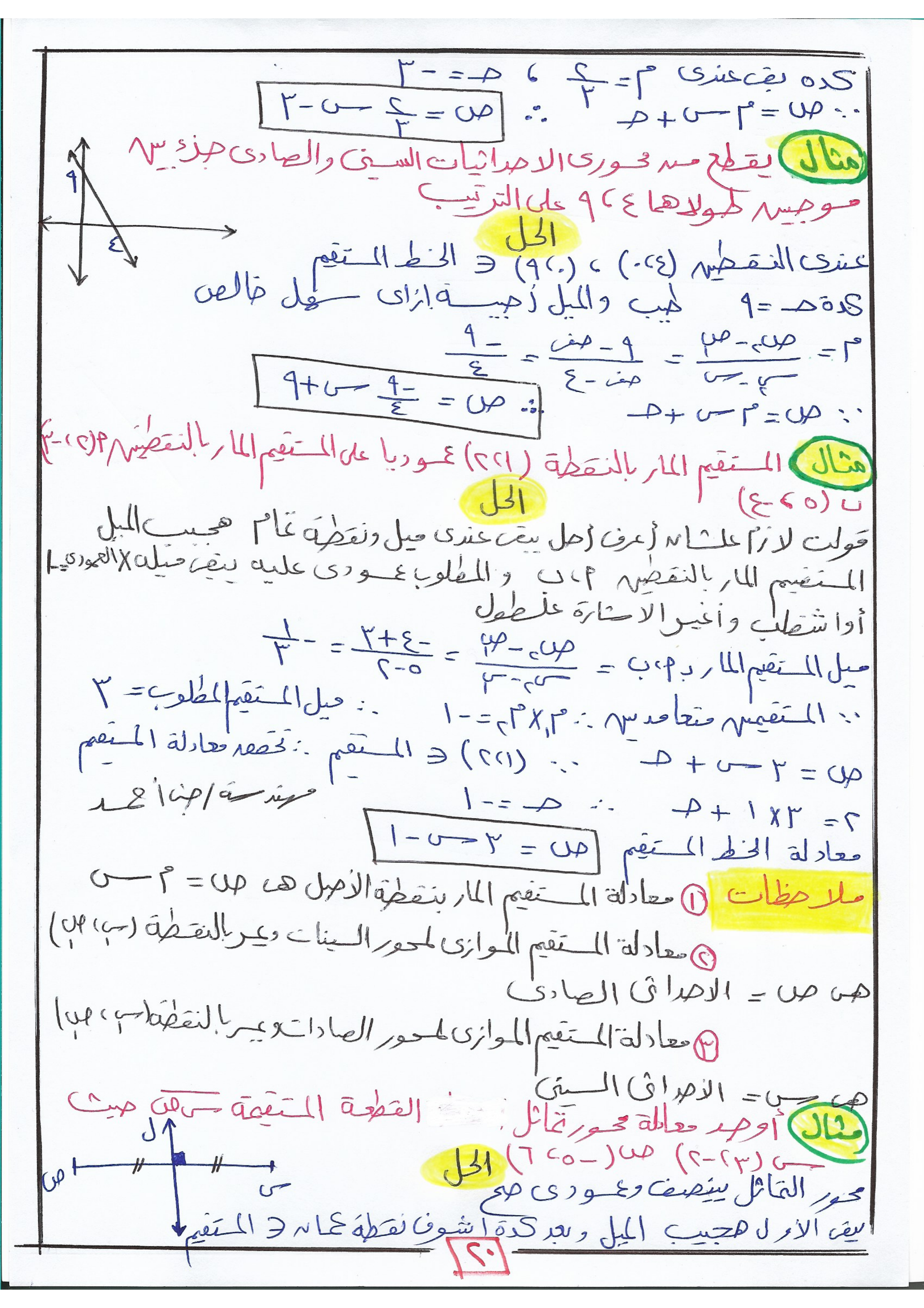
مثال يقطع الجزء السالب من محور الصادات ٣ وحدات ويوازي المستقيم الذي معادلته ٢س - ٣ص = ٦

الحل

هنا معطى جـ = -٣ الميل بقى مش موجود أجيبه

يوازي المستقيم ٢س - ٣ص = ٦ → ميل هذا المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{-٣}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = ميل الموازي له = $\frac{-٢}{-٣}$



كده بقى عندى $م = \frac{٤}{٣}$ ، $ح = -٣$

$\because ص = م س + ح$ $\therefore$ $ص = \frac{٤}{٣} س - ٣$

مثال يقطع مستقيم محورى الاحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب

الحل

عندى النقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٩) $\in$ الخط المستقيم

كده ح = ٩ هجيب والميل أجيبه إزاى سهل خالص

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - صفر}{صفر - ٤} = \frac{-٩}{٤}$

$\because ص = م س + ح$ $\therefore$ $ص = \frac{-٩}{٤} س + ٩$

مثال المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) عموديا على المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، -٣) ، ب (٥ ، -٤)

الحل

قولت لازم علشان أعرف أحل يبقى عندى ميل ونقطة تمام هجيب الميل

المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والمطلوب عمودى عليه يبقى ميله X العمودى = -١

أو اشقلب وأغير الاشارة علطول

ميل المستقيم المار بـ أ ، ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٤ + ٣}{٥ - ٢} = -\frac{١}{٣}$

$\because$ المستقيمين متعامدين $\therefore$ $م_١ \times م_٢ = -١$ $\therefore$ ميل المستقيم المطلوب = ٣

$ص = ٣ س + ح$ $\because$ (١ ، ٢) $\in$ المستقيم $\therefore$ تحقق معادلة المستقيم

$٢ = ٣ \times ١ + ح$ $\therefore$ $ح = -١$

مهندسة / هناء أحمد

معادلة الخط المستقيم $ص = ٣ س - ١$

ملاحظات

(١) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل هى $ص = م س$

(٢) معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$

هى ص = الاحداثى الصادى

(٣) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$

هى س = الاحداثى السينى

مثال أوجد معادلة محور تماثل القطعة المستقيمة $\overline{س ص}$ حيث

س (٣ ، -٢) ، ص (-٥ ، ٦)

الحل

محور التماثل بينصف وعمودى صح

يبقى الأول هجيب الميل وبعد كده أشوف نقطة عشان $\in$ المستقيم

ميل $\overleftrightarrow{سص}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٦ + ٢}{-٥ - ٣}$ = -١

∵ ل ⊥ $\overleftrightarrow{سص}$ ∴ ميل محور التماثل = ١ وشقلب واغير اشارة

فاصل النقطة نقطة منتصف $\overline{سص}$ ∈ محور التماثل تمام

∴ نقطة المنتصف $\overline{سص}$ = $\left(\frac{٣ - ٥}{٢}، \frac{-٢ + ٦}{٢}\right)$ = (-١، ٢)

∵ (-١، ٢) تحقق معادلة محور التماثل ص = س + جـ

∴ ٢ = -١ + جـ ∴ جـ = ٣ ∴ معادلة محور تماثل $\overline{سص}$ هي **ص = س + ٣**

مثال إذا كان المستقيم ل: ٢س - ٣ص - ٦ = صفر يقطع محور السينات عند النقطة أ ومحور الصادات عند النقطة ب أوجد أ، ب ثم معادلة المستقيم المار بنقطة منتصف $\overline{أب}$ ويوازي محور الصادات

الحل

هنا الأول عايز أ، ب بعد كده عايز معادلة مستقيم المار بمنتصف أب

∵ ٢س - ٣ص = ٦ ← تقطع محور السينات فـ أ ∴ أ(س، ٠)

تقطع محور الصادات فـ ب أ(٠، ص)

ممكن من المعادلة أجيب على طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{جـ}{معامل ص}$

= $\frac{٦}{-٣}$ = -٢ هنا الإشارة مهمة أخدها بالسالب عادي لأنه أنا ماش

عايز طول ب(٠، -٢)

النقطة أ(س، ٠) ∈ المستقيم أعوض بيها ٢س - ٣ × صفر = ٦ ∴ س = ٣

كده تمام أول مطلوب

أ (٣، ٠) ب(٠، -٢)

تاني مطلوب عايز معادلة المستقيم المار بمنتصف أب ويوازي محور الصادات

يعني عايز نقطة المنتصف فقط وتبقى المعادلة هي س = الإحداثي السيني

نقطة منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٣ + صفر}{٢}، \frac{-٢ + صفر}{٢}\right)$ = $\left(\frac{٣}{٢}، -١\right)$

∴ معادلة المستقيم المار $\left(\frac{٣}{٢}، -١\right)$ ويوازي الصادات هي **س = $\frac{٣}{٢}$**

مثال إذا كان المستقيم ص - (٢ك - ١) س = ٧، المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ٤٥° متوازيين فأوجد ك

الحل

المستقيمين متوازيين ∴ ميل المستقيم الأول = ميل المستقيم الثاني

سالب معامل س / معامل ص → -٢ك - ١ = ظا ٤٥ ⇐ -٢ك - ١ = ١ ∴ **ك = -١**

مثال أ ب جـ د مربع فيه أ(٥، ٤) جـ (-١، ٦) فأوجد معادلة $\overleftrightarrow{بد}$

الحل

هنا معندیش ولا ميل ولا نقطة ∈ $\overleftrightarrow{بد}$
يبقى هجهز السؤال الأول إزاى
من خواص المربع القطران متعامدان وينصف كل منها الآخر
يبقى هجيب ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ ومنه أجيب ميل $\overline{بد}$
علشان نقطة منتصف $\overline{أجـ}$ هى برضو منتصف $\overleftrightarrow{بد}$ تمام

ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ = $\frac{٦-٤}{-١-٥}$ = $\frac{٢}{-٦}$ = $\frac{-١}{٣}$ ∵ القطران متعامدان

∴ ميل $\overleftrightarrow{بد}$ = ٣

معادلة $\overleftrightarrow{بد}$ هى ص = ٣س + جـ

∵ نقطة منتصف $\overline{أجـ}$ ∈ المستقيم $\overleftrightarrow{بد}$

منتصف $\overline{أجـ}$ = $\left(\frac{٥-١}{٢}، \frac{٤+٦}{٢}\right)$ = (٢، ٥) تحقق معادلة $\overleftrightarrow{بد}$

∴ ٥ = ٣ × ٢ + جـ ← جـ = -١

∴ معادلة $\overleftrightarrow{بد}$ هى

ص = ٣س - ١

مثال فى الشكل المقابل النقط أ (٢، ٦) و (٠، ٠) ب (٦، ٢) ، د هى رؤوس معين أوجد
① أحداثى د ② معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{وَد}$ ③ ق(∠ د و هـ)

الحل

علشان أجيب د عندى نقطة منتصف $\overline{دو}$ هى نقطة منتصف $\overline{بأ}$ تمام
بعد كدة عايز معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{وَد}$ بقى عندى نقطتين ، و أعرف أجيب الميل تمام
ق(∠ د و هـ) إزاى ممكن أجيب قياس زاوية (جـ و د) من ميل $\overleftrightarrow{دو}$ صح ومنها
أجيب زاوية (د و هـ)

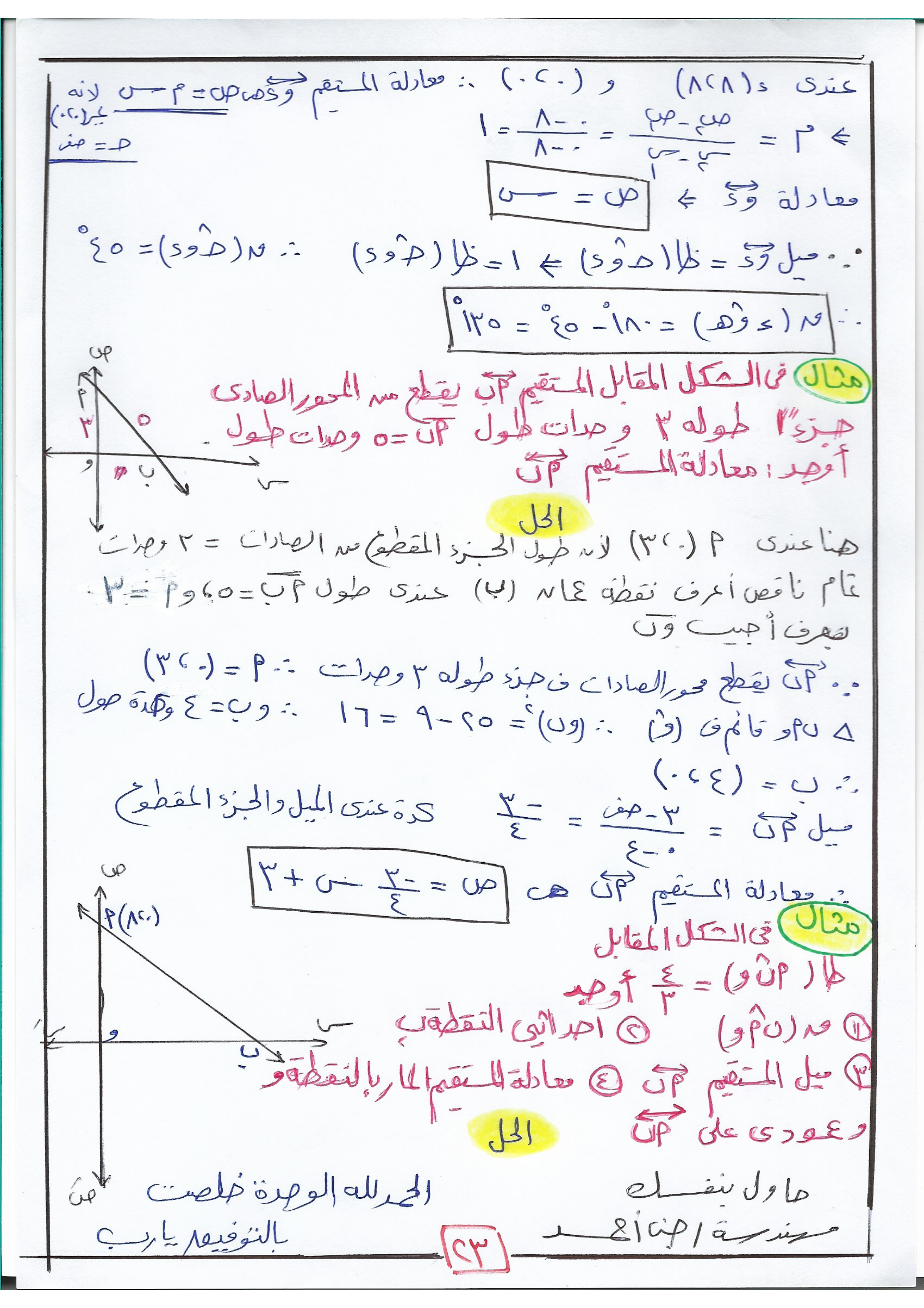
نفرض أن د (س، ص) ∵ نقطة منتصف $\overline{بأ}$ = نقطة منتصف $\overline{ود}$

∴ $\left(\frac{٦+٢}{٢}، \frac{٦+٢}{٢}\right)$ = $\left(\frac{٠+س}{٢}، \frac{٠+ص}{٢}\right)$

∴ (٤، ٤) = $\left(\frac{س}{٢}، \frac{ص}{٢}\right)$ مهندسة/ مها أحمد

$\frac{س}{٢}$ = ٤ ومنها س = ٨

$\frac{ص}{٢}$ = ٤ ومنها ص = ٨ ∴ د=(٨، ٨) تمام



عندى د (٨، ٨) و (٠، ٠) ∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{وده}}$ ص = م س لأنه يمر (٠، ٠) حـ = صفر

⇐ م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٠ - ٨}{٠ - ٨}$ = ١

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ود}}$ ⇐ **ص = س**

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ود}}$ = ظا (هـ و̂ د) ⇐ ١ = ظا (هـ و̂ د) ∴ ق (هـ و̂ د) = ٤٥°

∴ **ق (د و̂ هـ) = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°**

مثال فى الشكل المقابل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع من المحور الصادى جزء" طوله ٣ وحدات طول أب = ٥ وحدات طول.
أوجد: معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

الحل

هنا عندى أ (٠، ٣) لأن طول الجزء المقطوع من الصادات = ٣ وحدات
تمام ناقص أعرف نقطة كمان (ب) عندى طول $\overline{\text{أب}}$ = ٥، و أو = ٣ نعرف أجيب و ب

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع محور الصادات فى جزء طوله ٣ وحدات ∴ أ = (٠، ٣)

△ أ ب و قائم فى (و) ∴ (و ب)^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦ ∴ و ب = ٤ وحدة طول

∴ ب = (٤، ٠)

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٣ - صفر}{٠ - ٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$ كدة عندى الميل والجزء المقطوع

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى **ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٣**

مثال فى الشكل المقابل
ظا (أ ب̂ و) = $\frac{٤}{٣}$ أوجد
(١) ق (ب أ̂ و) (٢) احداثي النقطة ب
(٣) ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة و وعمودى على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

الحل

حاول بنفسك

الحمد لله الوحدة خلصت
بالتوفيق يارب

مهندسة / منة أحمد

حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

حساب المثلثات: فرع من فروع الرياضيات يقوم بدراسة النسب بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زوايا المثلث

قبل بداية شرح الدرس نفتكر مع بعض مجموعة نقاط مهمة

١- القياس الستيني للزاوية

مثلاً ٣ أ ٤٥ ٢٥° عايز أعرف الزاوية دي بتساوي كام درجة عند حلها بعد استخدام الآلة الحاسبة ≃ ٢٥,٧٥

25 ,,, 45 ,,, 13 ,,, = ,,, 25.75°

٢) مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

٣) مجموع قياس الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°

٤) مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

أ، ب، ج، د، الوتر

٥) نظرية فيثاغورث في △ أ ب ج قائم في ب

∴ (أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2

٦) نظرية إقليدس

(ب أ)^2 = أ د × أ ج

(ب ج)^2 = ج د × ج أ

(ب د)^2 = د أ × د ج

ب د = (أ ب × ب ج) / أ ج

مثال ① إذا كانت النسبة بين قياس زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل

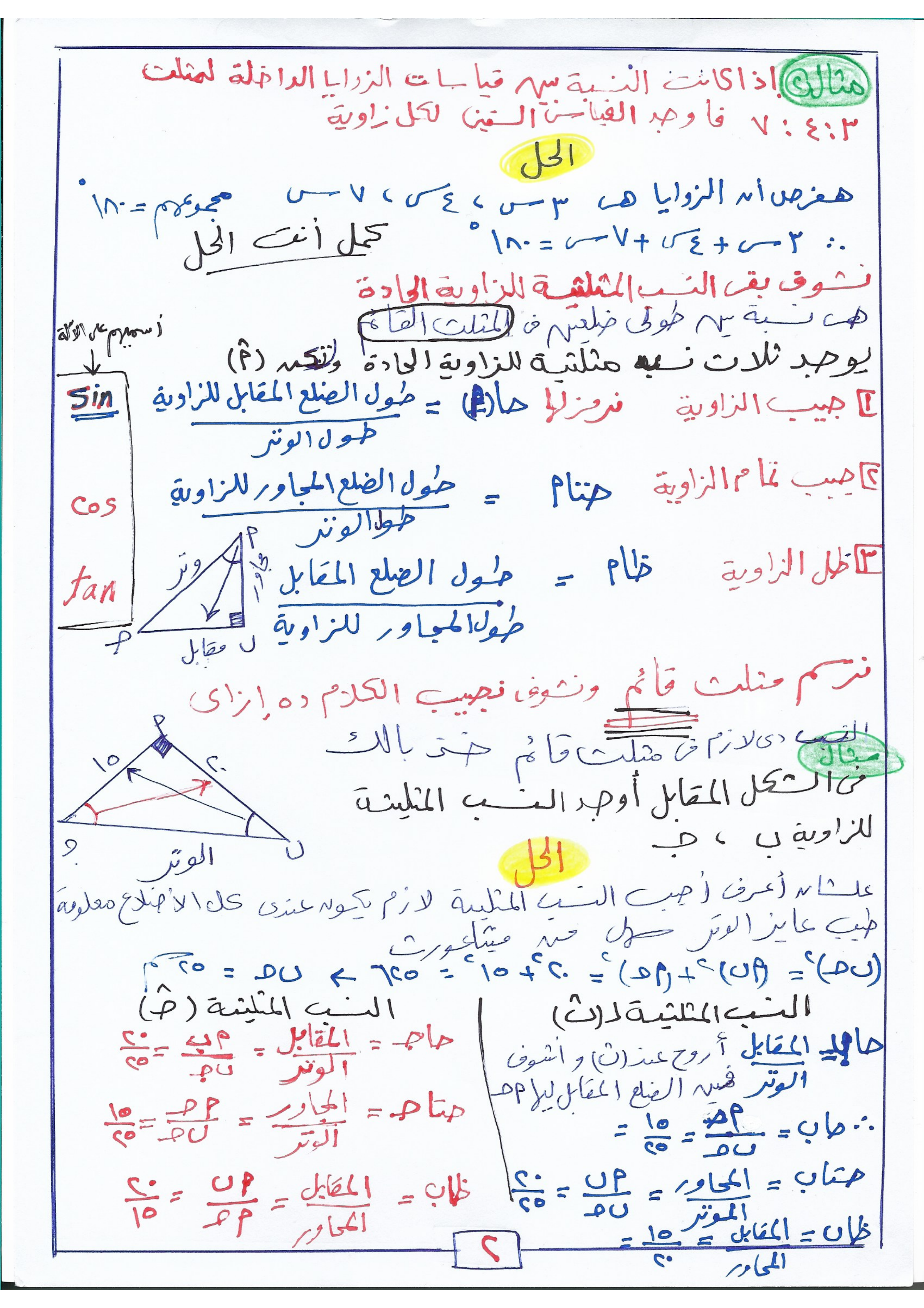
زاويتين متكاملتين ← مجموعهم ١٨٠ بيقول النسبة بينهم ٣ : ٥

هفرض إن الزاوية الأولى ٣ س ← يبقى الثانية ٥ س

∴ ٣ س + ٥ س = ١٨٠ ← ٨ س = ١٨٠ ∴ س = ٢٢,٥

الزاوية الأولى = ٣ × ٢٢,٥ = ٦٧,٥° أستخدم الآلة وأحولها إلى ستيني = ٦٧° ٣٠َ

الزاوية الثانية = ٥ × ٢٢,٥ = ١١٢,٥° = ١١٢° ٣٠َ



مثال: إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياسات الستينية لكل زاوية

الحل

هنفرض أن الزوايا هي ٣س ، ٤س ، ٧س مجموعهم = ١٨٠°

∴ ٣س + ٤س + ٧س = ١٨٠°

كمل أنت الحل

نشوف بقى النسب المثلثية للزاوية الحادة

هي نسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم

يوجد ثلاث نسب مثلثية للزاوية الحادة ولتكن (أ)

أسميهم على الآلة

١ جيب الزاوية ونرمز لها جا(أ) = طول الضلع المقابل للزاوية / طول الوتر — Sin

٢ جيب تمام الزاوية جتا(أ) = طول الضلع المجاور للزاوية / طول الوتر — cos

٣ ظل الزاوية ظا(أ) = طول الضلع المقابل / طول المجاور للزاوية — tan

نرسم مثلث قائم ونشوف نجيب الكلام ده إزاي

النسب دي لازم في مثلث قائم خد بالك

مثال: في الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاوية ب ، جـ

الحل

علشان أعرف أجيب النسب المثلثية لازم يكون عندي كل الأضلاع معلومة

طب عايز الوتر هجيبه من فيثاغورث

(ب جـ)² = (أ ب)² + (أ جـ)² = ٢٠² + ١٥² = ٦٢٥ ← ب جـ = ٢٥ سم

النسب المثلثية لـ(ب)

جا ب = المقابل / الوتر — أروح عند (ب) وأشوف فين الضلع المقابل ليها أ جـ

∴ جا ب = أ جـ / ب جـ = ١٥ / ٢٥

جتا ب = المجاور / الوتر = أ ب / ب جـ = ٢٠ / ٢٥

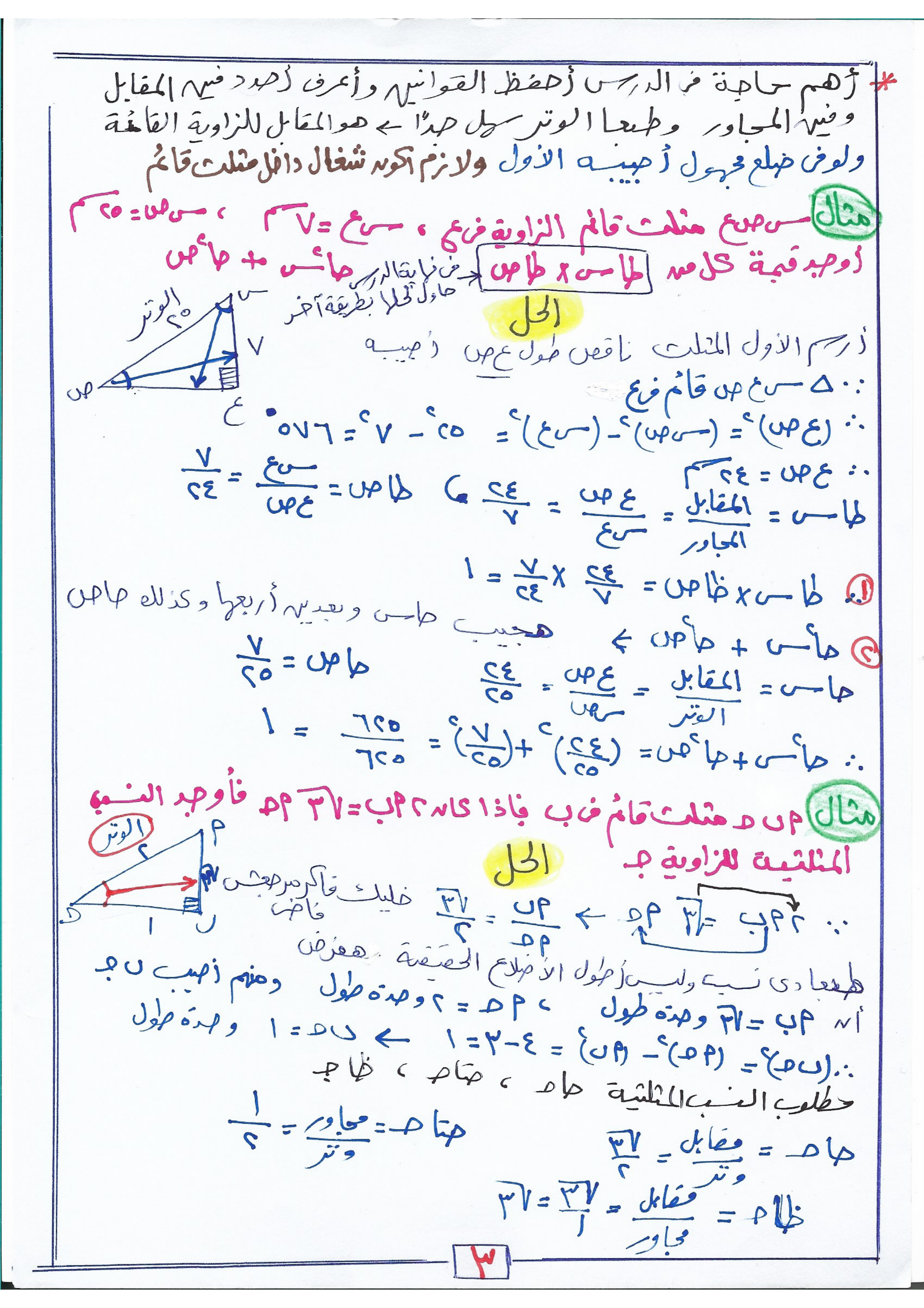
ظا ب = المقابل / المجاور = ١٥ / ٢٠

النسب المثلثية (جـ)

جا جـ = المقابل / الوتر = أ ب / ب جـ = ٢٠ / ٢٥

جتا جـ = المجاور / الوتر = أ جـ / ب جـ = ١٥ / ٢٥

ظا جـ = المقابل / المجاور = أ ب / أ جـ = ٢٠ / ١٥



* أهم حاجة في الدرس أحفظ القوانين وأعرف أحدد فين المقابل وفين المجاور وطبعاً الوتر سهل جداً ← هو المقابل للزاوية القائمة
ولو في ضلع مجهول أجيبه الأول **ولازم أكون شغال داخل مثلث قائم**

مثال س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم
أوجد قيمة كل من **طا س × طا ص** ← من نهاية الدرس حاول الحل بطريقة آخر ، جا²س + جا²ص

الحل

أرسم الأول المثلث ناقص طول ع ص أجيبه

∵ ∆ س ع ص قائم في ع

∴ (ع ص)² = (س ص)² − (س ع)² = ٢٥² − ٧² = ٥٧٦

∴ ع ص = ٢٤ سم

طا س = المقابل / المجاور = ع ص / س ع = ٢٤ / ٧ ، طا ص = س ع / ع ص = ٧ / ٢٤

(١) طا س × طا ص = ٢٤/٧ × ٧/٢٤ = ١

(٢) جا²س + جا²ص ← هجيب جا س وبعدين أربعها وكذلك جا ص

جا س = المقابل / الوتر = ع ص / س ص = ٢٤ / ٢٥ ، جا ص = ٧ / ٢٥

∴ جا²س + جا²ص = (٢٤/٢٥)² + (٧/٢٥)² = ٦٢٥ / ٦٢٥ = ١

مثال أ ب جـ مثلث قائم في ب فإذا كان ٢ أ ب = √٣ أ جـ فأوجد النسب المثلثية للزاوية جـ

الحل

∵ ٢ أ ب = √٣ أ جـ ← أ ب / أ جـ = √٣ / ٢

طبعاً دي نسبة وليست أطوال الأضلاع الحقيقية هنفرض

أ ب = √٣ وحدة طول ، أ جـ = ٢ وحدة طول ومنهم أجيب ب جـ

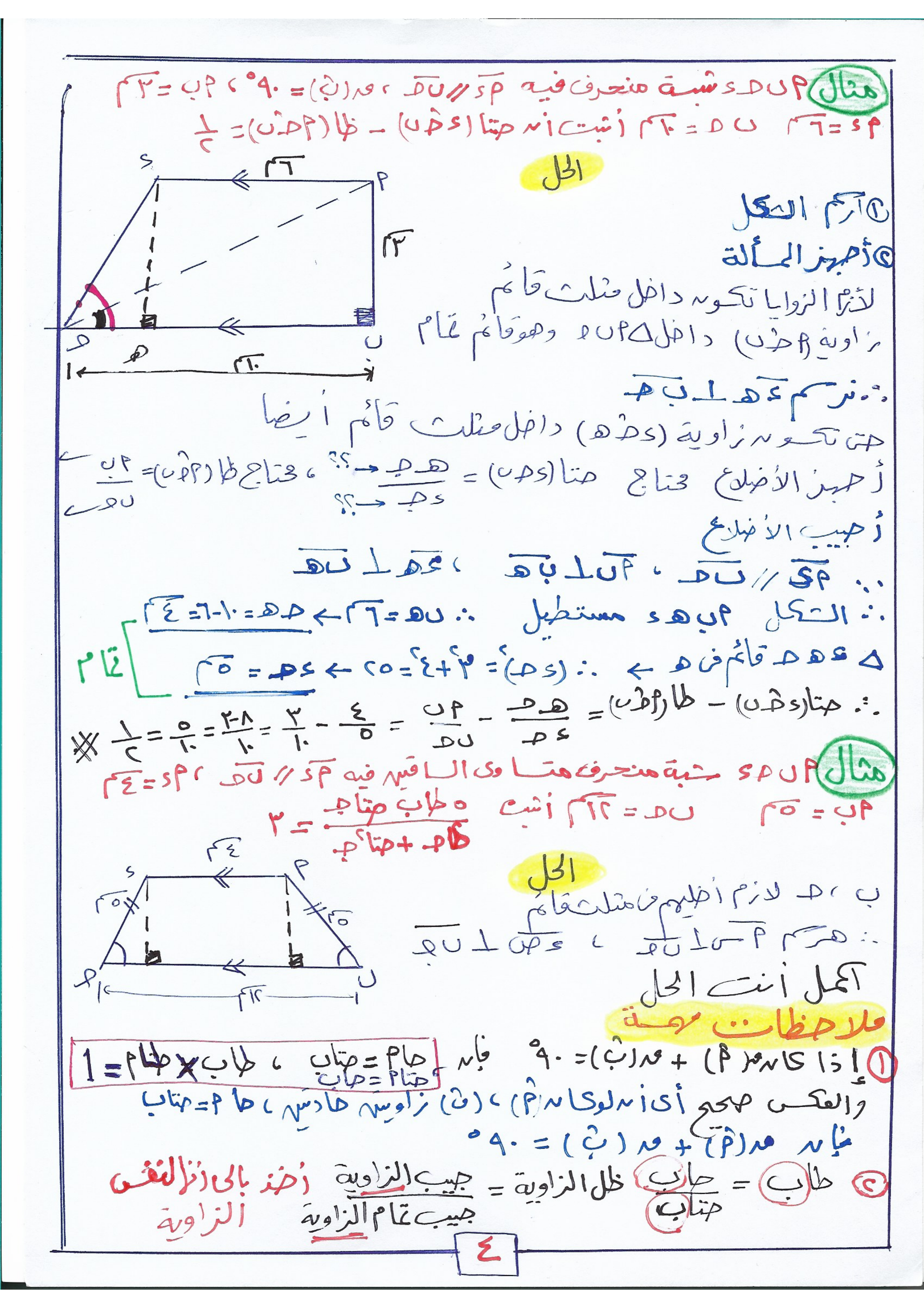
∴ (ب جـ)² = (أ جـ)² − (أ ب)² = ٤ − ٣ = ١ ← ب جـ = ١ وحدة طول

مطلوب النسب المثلثية جا جـ ، جتا جـ ، ظا جـ

جا جـ = مقابل / وتر = √٣ / ٢

جتا جـ = مجاور / وتر = ١ / ٢

ظا جـ = مقابل / مجاور = √٣ / ١ = √٣



مثال أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{أد} // \overline{بجـ}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، أب = ٣ سم
أد = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم أثبت أن جتا(∠د جـ ب) − ظا(∠أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

الحل

① أرسم الشكل
② أجهز المسألة
لازم الزوايا تكون داخل مثلث قائم
زاوية (أ جـ ب) داخل △ أ ب جـ وهو قائم
∴ نرسم $\overline{د هـ} \perp \overline{ب جـ}$
حتى تكون زاوية (د جـ هـ) داخل مثلث قائم أيضا
أجهز الأضلاع نحتاج جتا(د جـ ب) = $\frac{هـ جـ}{د جـ}$ ؟؟ ، نحتاج ظا(أ جـ ب) = $\frac{أب}{ب جـ}$
أجيب الأضلاع
∵ $\overline{أد} // \overline{ب جـ}$ ، $\overline{أب} \perp \overline{ب هـ}$ ، $\overline{د هـ} \perp \overline{ب هـ}$
∴ الشكل أ ب هـ د مستطيل ∴ ب هـ = ٦ سم ← جـ هـ = ١٠ − ٦ = ٤ سم
△ د هـ جـ قائم في هـ ← ∴ (د جـ)² = ٣² + ٤² = ٢٥ ← د جـ = ٥ سم

قائم

∴ جتا(د جـ ب) − ظا(أ جـ ب) = $\frac{هـ جـ}{د جـ} - \frac{أب}{ب جـ} = \frac{٤}{٥} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٨-٣}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ##

مثال أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{أد} // \overline{بجـ}$ ، أد = ٤ سم
أب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم أثبت $\frac{٥ ظا ب جتا جـ}{ظا جـ + جتا^٢ جـ} = ٣$

الحل

ب ، جـ لازم أظبطهم في مثلث قائم
∴ نرسم $\overline{أس} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{د ص} \perp \overline{ب جـ}$
أكمل أنت الحل

ملاحظات مهمة

① إذا كان ق(أ) + ق(ب) = ٩٠° فإن جا أ = جتا ب ، جتا أ = جا ب ، ظا ب × ظا أ = 1
والعكس صحيح أي أن لو كان (أ) ، (ب) زاويتين حادتين ، جا أ = جتا ب
فإن ق(أ) + ق(ب) = ٩٠°

② ظا ب = $\frac{جا ب}{جتا ب}$ = ظل الزاوية = $\frac{جيب الزاوية}{جيب تمام الزاوية}$ أخذ بالي أن النفس الزاوية

مثال أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١) في △ أ ب جـ إذا كان جا أ = جتا ب فإن △ أ ب جـ يكون ....

(منفرج الزاوية - حاد الزوايا - **قائم الزاوية** - منفرج الزاوية ومتساوي الساقين)

طالما جا أ = جتا ب ← ∴ ق(أ) + ق(ب) = ٩٠° ← ق(ج) = ٩٠

المثلث قائم الزاوية

٢) إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب فإن جتا أ + جا جـ = ...

(٢ جتا جـ ، ٢ جا ب ، ٢ جا أ ، **٢ جتا أ**)

قائم في ب ← ق(أ) + ق(جـ) = ٩٠° ← جتا أ = جا جـ

∴ جا جـ + جا جـ = ٢ جا جـ ← بس مش في الاختيار

جتا أ + جتا أ = ٢ جتا أ ←

٣) إذا كان س ، ص قيا س زاويتين متتامتين وكان جا س = $\frac{٣}{٥}$ فإن

جتا ص = ... ($\frac{٤}{٥}$ ، **$\frac{٣}{٥}$** ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٣}$)

جا س = جتا ص = $\frac{٣}{٥}$

٤) في الشكل المقابل

جا ب + جتا جـ = ... (١ ، **$\frac{٨}{٥}$** ، $\frac{٦}{٥}$ ، صفر)

أ ، ب ، جـ ، ٢٤ ، ١٨

جا ب + جتا جـ ← أجيب الأول طول ب جـ = ٣٠

صح كده

← جا ب + جتا جـ = ٢ جا ب = ٢ جتا جـ

= ٢ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٨}{٥}$

٥) إذا كان ق(أ) = ٧٥° ، جا ب = جتا أ حيث ب زاوية حادة فإن

ق(ب) = ... (٤٥ ، ٧٥° ، **١٥** ، ١٠٥°)

هنا جا ب = جتا أ

← ق(ب) + ق(أ) = ٩٠°

ق(ب) + ٧٥ = ٩٠°

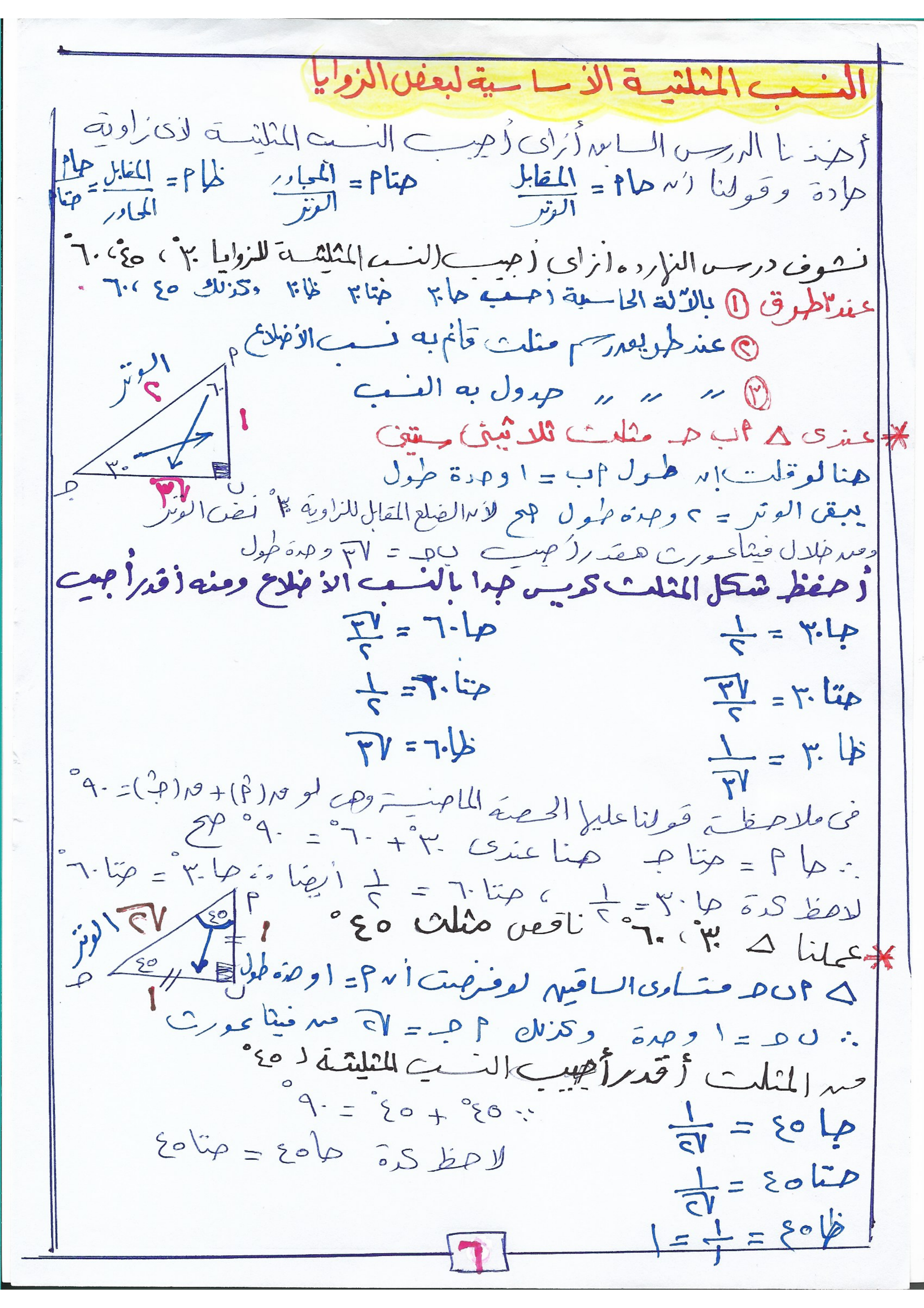
٦) $\frac{\text{جا ١١}}{\text{جا ٧٩}} \times \frac{\text{جا ٢١}}{\text{جا ٦٩}} \times \frac{\text{جا ٣١}}{\text{جا ٥٩}} \times \frac{\text{جا ٤١}}{\text{جا ٤٩}} \times \text{......} \times \frac{\text{جا ٨١}}{\text{جا ٩}} = \text{......}$

(١ ، **ظا ١°** ، ظا ٨٩° ، جا ١°) ← هختصر هيبقى عندي $\frac{\text{جا ١١}}{\text{جا ٨٩}}$

وبعد جا ٨٩ = جتا ١ ← $\frac{\text{جا ١}}{\text{جتا ١}}$ = ظا ١

٨) إذا كان أ ، ب زاويتين متتامتين فإن ظا أ × ظا ب = ...

(**١** ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ظا أ ، ٢ ظا ب)



النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

أخذنا في الدرس السابق إزاي أجيب النسب المثلثية لأي زاوية حادة وقولنا إن جا م = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا م = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظا م = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جا م}}{\text{جتا م}}$

نشوف درس النهارده إزاي أجيب النسب المثلثية للزوايا ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠

عندي ٣ طرق ① بالآلة الحاسبة أجيب جا ٣٠ جتا ٣٠ ظا ٣٠ وكذلك ٤٥ ، ٦٠ .

② عن طريق رسم مثلث قائم به نسب الأضلاع

③ " " " جدول به النسب

* عندي △ أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني

هنا لو قلت إن طول أب = ١ وحدة طول

يبقى الوتر = ٢ وحدة طول صح لأن الضلع المقابل للزاوية ٣٠ نصف الوتر

ومن خلال فيثاغورث هقدر أجيب ب جـ = √٣ وحدة طول

أحفظ شكل المثلث كويس جدا بالنسب الأضلاع ومنه أقدر أجيب

جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ، جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ظا ٦٠ = √٣

في ملاحظة قولنا عليها الحصة الماضية وهي لو ق(أ) + ق(جـ) = ٩٠°

∴ جا أ = جتا جـ   هنا عندي ٣٠° + ٦٠° = ٩٠° صح

لاحظ كده جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ أيضا ∴ جا ٣٠° = جتا ٦٠°

* عملنا △ ٣٠ ، ٦٠° ناقص مثلث ٤٥°

△ أ ب جـ متساوي الساقين لو فرضت أن أب = ١ وحدة طول

∴ ب جـ = ١ وحدة وكذلك أ جـ = √٢ من فيثاغورث

من المثلث أقدر أجيب النسب المثلثية لـ ٤٥°

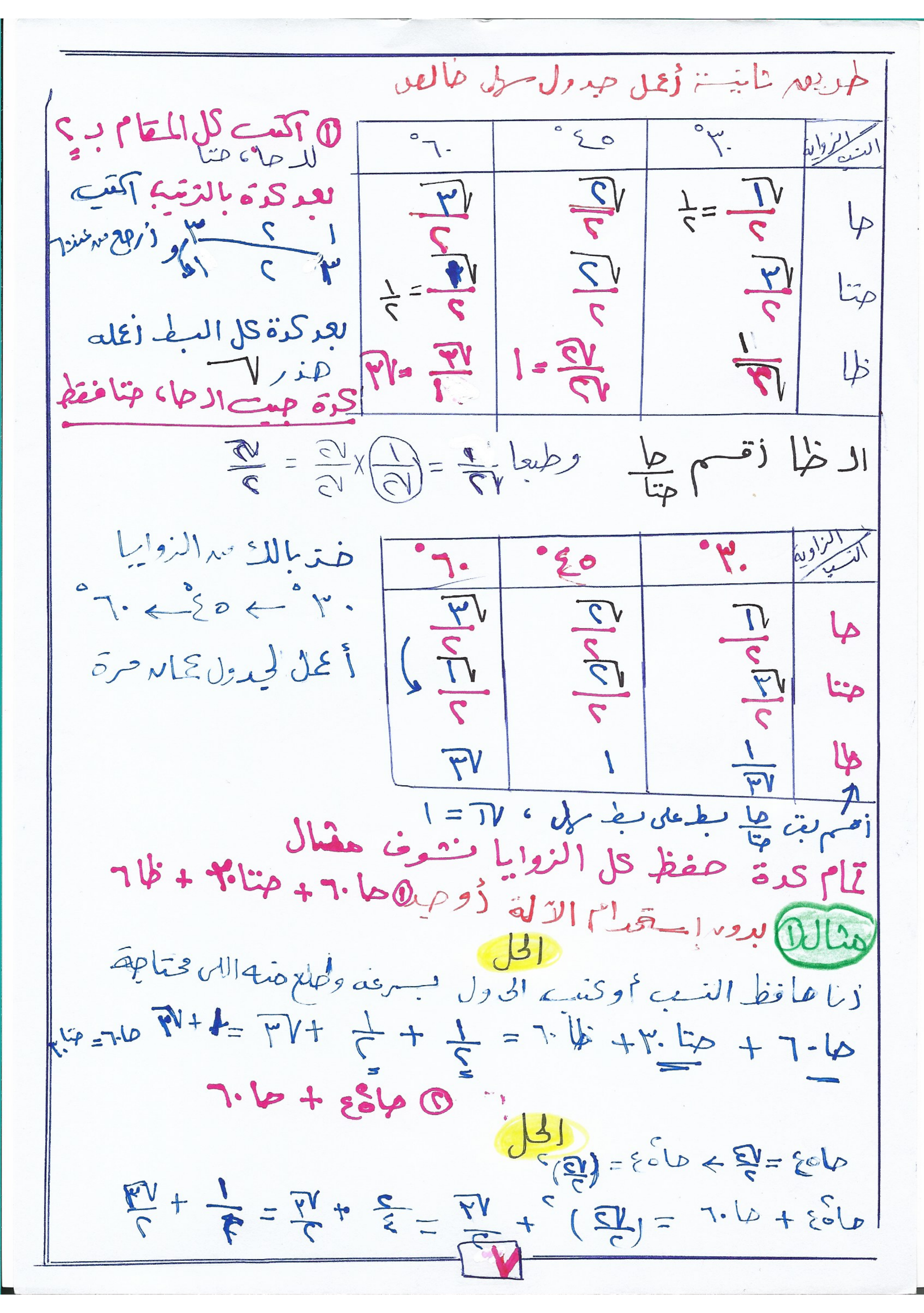
∵ ٤٥° + ٤٥° = ٩٠

لاحظ كده جا ٤٥ = جتا ٤٥

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٤٥ = $\frac{١}{١}$ = ١



طريقة ثانية أعمل جدول سهل خالص

النسب \ الزاوية	٣٠°	٤٥°	٦٠°
حا	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
حتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
ظا	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$

① أكتب كل المقام ب ٢ للحا، حتا

بعد كدة بالترتيب أكتب ١ ٢ ٣ و أرجع من عندنا ٣ ٢ ١

بعد كدة كل البسط أعمله جذر $\sqrt{\ }$

كدة جبت الحا، حتا فقط

الظا أقسم $\frac{\text{حا}}{\text{حتا}}$ وطبعاً $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

النسب \ الزاوية	٣٠°	٤٥°	٦٠°
حا	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
حتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$

خد بالك من الزوايا

٣٠° ← ٤٥° ← ٦٠°

أعمل الجدول ع ١٠٠ مرة

أقسم بقى $\frac{\text{حا}}{\text{حتا}}$ بسط على بسط سهل ، $\sqrt{1} = 1$

تمام كدة حفظ كل الزوايا نشوف مثال

مثال ① بدون استخدام الآلة أوجد ① حا ٦٠ + حتا ٣٠ + ظا ٦٠

الحل

أنا حافظ النسب أو كتب الجدول بسرعة وطلع منه اللي محتاجه

حا ٦٠ + حتا ٣٠ + ظا ٦٠ = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ حا ٦٠ = حتا ٣٠

② حا² ٤٥ + حا ٦٠

الحل

حا ٤٥ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ← حا² ٤٥ = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

حا² ٤٥ + حا ٦٠ = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

④ جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ - جتا ٦٠ جا ٣٠ حيث ٠ < س < ٩٠°

الحل

هعوض وأفتكر إن جا ٦٠ = جتا ٣٠ ، جتا ٦٠ = جا ٣٠

$$\text{جا س} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \leftarrow \text{جا س} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

جا س $= \frac{1}{2}$ أية عندي الـ جا $= \frac{1}{2}$ جا ٣٠ $= \frac{1}{2}$

∴ س = ٣٠°

مثال إذا كان جا س = ظا ٣٠ جا ٦٠ حيث س زاوية حادة أوجد قيمة ٤ جتا س ظا ٢س بدون الآلة

الحل

لازم الأول أعرف قيمة س

$$\text{جا س} = \text{ظا ٣٠ جا ٦٠} \leftarrow \text{جا س} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \leftarrow \text{جا س} = \frac{1}{2}$$

∴ س = ٣٠°

∴ قيمة المقدار ٤ جتا س ظا ٢س = ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}$ (٢ × ٣٠)

$= 6$

مثال في الشكل المقابل ق(أ̂) = ٢ ق(ج̂) أوجد قيمة جتا أ + ظا ج

(شكل: مثلث أ ب ج قائم في ب)

الحل

∵ المثلث قائم في ب

∴ ق(أ̂) + ق(ج̂) = ٩٠° ← ٢ق(ج̂) + ق(ج̂) = ٩٠ ← ٣ق(ج̂) = ٩٠°

∴ ق(ج̂) = ٣٠ ← ق(أ̂) = ٦٠° أو علطول طالما △ قائم يبقى ٣٠ ، ٦٠°

$$\therefore \text{جتا ٦٠} + \text{ظا}^2\ ٣٠ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

* بدون استخدام الآلة أثبت ① جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠ − ١

الحل

الطرف الأيمن = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

الطرف الأيسر = ٢ جتا² ٣٠ − ١ = ٢ × $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢$ − ١ = ٢ × $\frac{٣}{٤}$ − ١ = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

② ظا ٦٠ = $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠}$

الحل

الطرف الأيمن = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

الطرف الأيسر = $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠}$ = $\frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢}$ = $\frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{١ - \frac{١}{٣}}$ = $\frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$

$\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$

∴ الطرفان متساويان

* أوجد قيمة س ① س جا² ٤٥ = ظا² ٦٠

الحل

هعوض عن النسب المثلثية وأجيب س

س × $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$ = $(\sqrt{٣})^٢$ ← س × $\frac{١}{٢}$ = ٣ ∴ س = ٣ × ٢ = ٦

② ٤ س = جتا² ٣٠ ظا² ٣٠ ظا² ٤٥

الحل

٤ س = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ \times (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢ \times ١$ = $\frac{١}{٤}$ ← ٤ س = $\frac{١}{٤}$ ∴ س = $\frac{١}{١٦}$

③ ظا س = ٤ جا ٣٠ جتا ٦٠ حيث س زاوية حادة

الحل

أخد بالي أن هنا س زاوية هعمل أية هعوض وأجيب ظا س = ؟؟

وبعدين أشوف هجيب س لوحدها إزاي

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ ← ظا س = ١ أية من الزوايا اللي عند ظلها = ١ ؟؟

ظا ٤٥ = ١ ← ∴ س = ٤٥

أ ٦٠ ٢ ١ ٣٠ ب جـ $\sqrt{٣}$

تابع النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

أخذنا الدرس السابق إزاي أجيب النسب المثلثية للزوايا (٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠) وعرفنا كمان لو كان معطى العكس النسب وعايز الزاوية مثلا حا س = $\frac{1}{2}$ ← نشوف أي الزاوية اللي جيبها = $\frac{1}{2}$

س = ٣٠° تمام كدة

اليوم هنشوف إزاي أجيب النسب المثلثية لأي زاوية

مهندسة جنى احمد

مثال ١ أوجد قيمة كل مما يأتي

① حا ٢٥َ ٣٥°

الحل

هنا الزاوية دي مش عندي في الجدول يبقى لازم استخدم الآلة

Sin 35 °‚‚‚ 25 °‚‚‚ = 0.57952

∴ حا ٢٥َ ٣٥° ≃ ٠٫٥٨

② حتا ٣٥َ ٧٢°

الحل

Cos 72 °‚‚‚ 35 °‚‚‚ = 0.29932

∴ حتا ٣٥َ ٧٢° ≃ ٠٫٢٩٩

③ طا ١٥ً ٣٢َ ٧٦° ≃ ٤٫١٨

Tan 76 °‚‚‚ 32 °‚‚‚ 15 °‚‚‚ = 4.1773

لو معطى العكس وعايز الزاوية هعمل أية

مثال٢ أوجد قيمة كل مما يأتي

① حا س = ٠٫٣٩٤٥ أوجد س

الحل

هنا علشان أجيب الزاوية هستخدم الآلة أيضا

shift sin .3945 = 23.235

بعد كدة هضغط على °‚‚‚ علشان أجيب الزاوية بالدرجات والدقائق

23° 14' 5.26"

∴ س ≃ ٥ً ١٤َ ٢٣°

② حتا س = ٠٫٧١٥٢ أوجد س

shift cos .7152 = 44.3404

44° 20' 25.47" بعد ما أحولها

س ≃ ٢٥ً ٢٠َ ٤٤°

shift tan 1.784 = 60.7277

60° 43' 39.75''

③ ظاس = ١٫٧٨٤

س = ٦٠° ٤٢' ٤٠''

لاحظ لو كان عايز الزاوية لازم أعمل shift

مهندسة حنى احمد

مثال٢ إذا كان أ ب جـ مثلث قائم في ب وكان ق(∠جـ) = ٤٠°

أجـ = ١٢ سم أوجد لأقرب سم طول $\overline{أب}$

الحل

حرسم الأول

هنا عندي زاوية جـ معكد أجيب جاجـ

∴ جاجـ = $\frac{أب}{أجـ}$ ← جا٤٠ = $\frac{أب}{١٤}$

∴ ٠٫٦٤٢٨ = $\frac{أب}{١٤}$ ← أب = ٨٫٩٩٩٠ سم

أب ≃ ٩ سم

بالآلة sin40 = 0.6428

مثال٤ مثلث أ ب جـ فيه أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

يقطعه في د أثبت أن جاب + جتاجـ = ١٫٤

من الدرس الأول

الحل

حرسم أيضا

كدة تمام عندي ب ، جـ كل منها داخل مثلث قائم

∴ ∆ أب جـ متساوي الساقين ، $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ ب د = د جـ = ½ ب جـ = ٦ سم

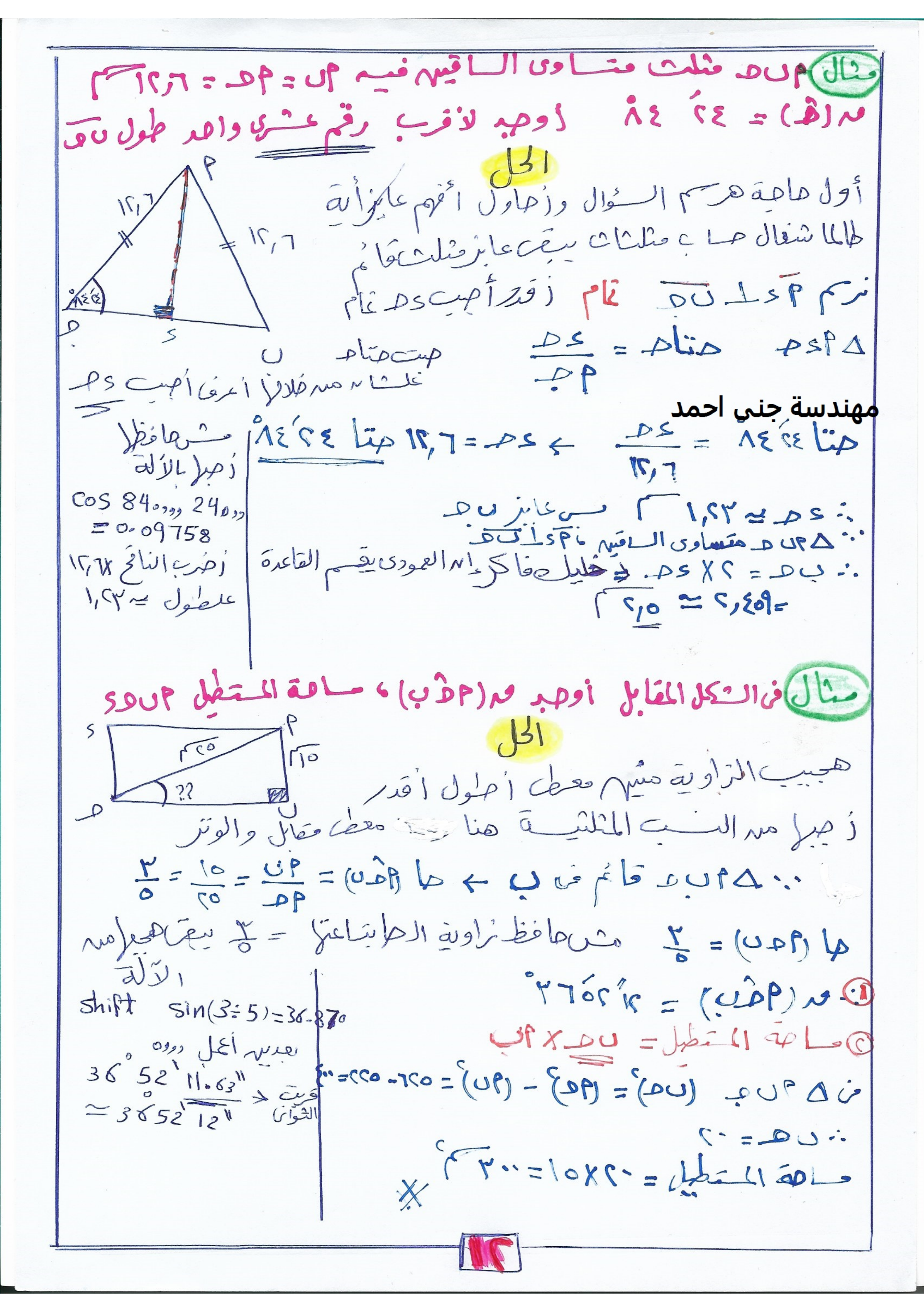
∴ ∆ أب د قائم في (د) ∴ (أد)² = (أب)² − (ب د)² = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

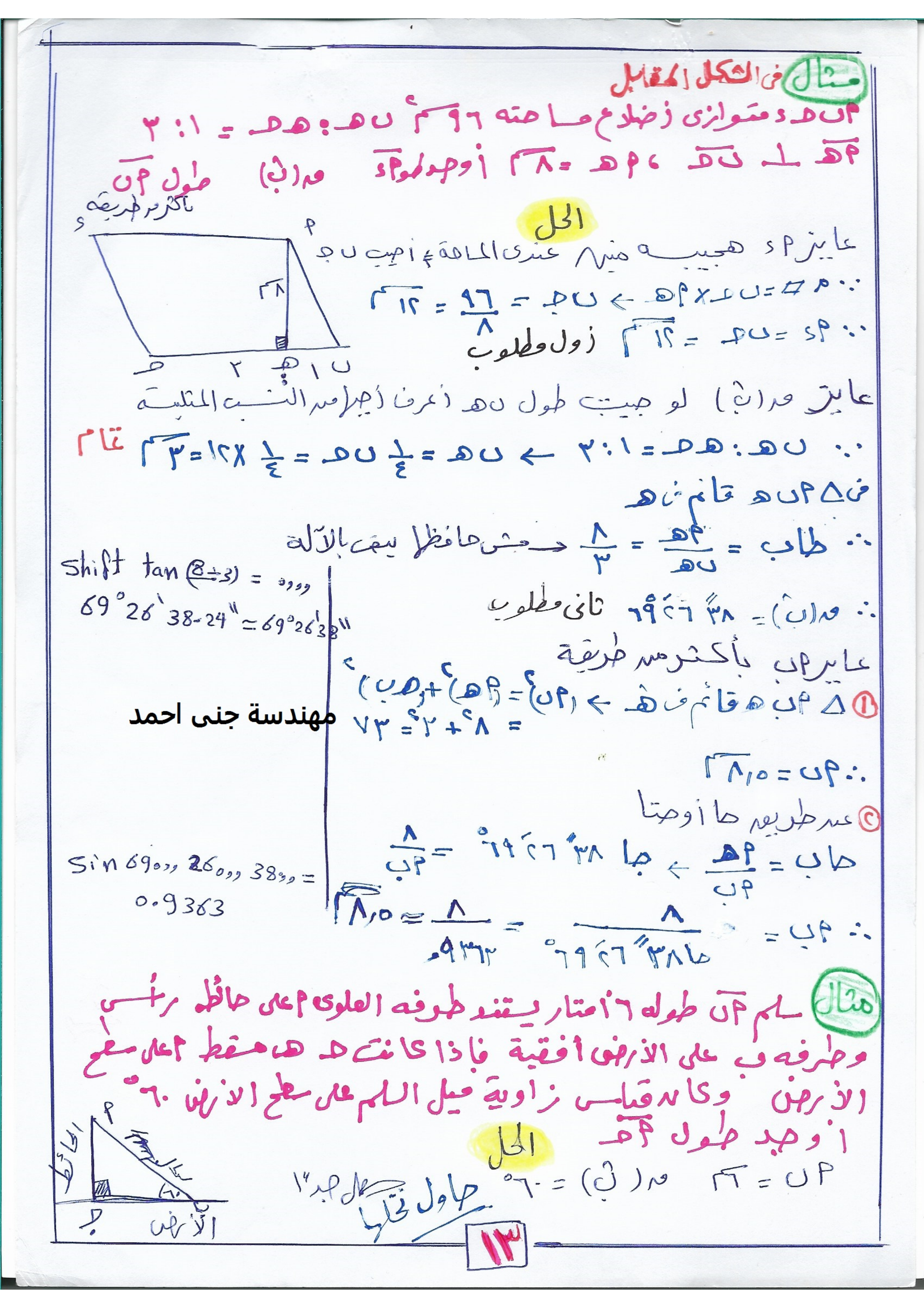
أد = ٨ سم

كده أنا جهزت السؤال

∴ جاب + جتاجـ = $\frac{أد}{أب}$ + $\frac{دجـ}{أجـ}$ = $\frac{٨}{١٠}$ + $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{١٤}{١٠}$ = ١٫٤

∴ جاب + جتاجـ = ١٫٤


مثال أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦ سم
ق (جـ) = ٨٤ ٢٤ أوجد لأقرب رقم عشري واحد طول ب جـ
الحل
أول حاجة هرسم السؤال وأحاول أفهم عايز إيه
طالما شغال حساب مثلثات يبقى عايز مثلث قائم
نرسم أ د ⊥ ب جـ فيصبح د جـ قائم
△ أ د جـ جتا جـ = د جـ / أ جـ
جتا ٨٤ ٢٤ = د جـ / ١٢,٦ ← د جـ = ١٢,٦ جتا ٨٤ ٢٤
∴ د جـ ≃ ١,٢٣ سم
∵ △ أ ب جـ متساوي الساقين
∴ ب جـ = ٢ × د جـ
= ٢,٤٥٩ ≃ ٢,٥ سم
cos 84° 24' = 0.09758
مثال في الشكل المقابل أوجد ق (أ جـ ب) ، مساحة المستطيل أ ب جـ د
الحل
∵ △ أ ب جـ قائم في ب ← حا (أ جـ ب) = أ ب / أ جـ = ١٥ / ٢٥ = ٣ / ٥
حا (أ جـ ب) = ٣ / ٥
① ق (أ جـ ب) = ٣٦ ٥٢ ١٢
② مساحة المستطيل = ب جـ × أ ب
∴ ب جـ = ٢٠
مساحة المستطيل = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠ سم²
shift sin(3÷5) = 36.87
36° 52' 11.63"
≃ 36° 52' 12"
مهندسة جني احمد
١٢



مثال في الشكل المقابل

ا ب جـ د متوازي أضلاع مساحته ٩٦ سم² ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

$\overline{ا هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ا هـ = ٨ سم أوجد طول ا د ، ق(∠ب) ، طول ا ب بأكثر من طريقة

الحل

عايز ا د هجيبه منين عندي المساحة ﻫ أجيب ب جـ

∵ م▱ = ب جـ × ا هـ ← ب جـ = $\frac{٩٦}{٨}$ = ١٢ سم

∴ ا د = ب جـ = ١٢ سم أول مطلوب

عايز ق(ب) لو جبت طول ب هـ أعرف أجيب من النسب المثلثية

∵ ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣ ← ب هـ = $\frac{١}{٤}$ ب جـ = $\frac{١}{٤}$ × ١٢ = ٣ سم تمام

في △ا ب هـ قائم في هـ

∴ طا ب = $\frac{ا هـ}{ب هـ}$ = $\frac{٨}{٣}$ ← مش حافظ يبقى بالآلة

shift tan (8÷3) = ,,,,
69°26'38.24" ≈ 69°26'38"

∴ ق(∠ب) = ٦٩° ٢٦' ٣٨" ثاني مطلوب

عايز ا ب بأكثر من طريقة

① △ا ب هـ قائم في هـ ← (ا ب)² = (ا هـ)² + (هـ ب)²
= ٨² + ٣² = ٧٣

∴ ا ب = ٨,٥ سم

② عن طريق جا أو جتا

جا ب = $\frac{ا هـ}{ا ب}$ ← جا ٦٩° ٢٦' ٣٨" = $\frac{٨}{ا ب}$

sin 69,,, 26,,, 38,,, =
0.9363

∴ ا ب = $\frac{٨}{جا ٦٩° ٢٦' ٣٨"}$ = $\frac{٨}{٠,٩٣٦٣}$ ≈ ٨,٥ سم

مهندسة جنى احمد

مثال سلم ا ب طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوي ا على حائط رأسي وطرفه ب على الأرض أفقية فإذا كانت جـ هي مسقط ا على سطح الأرض وكان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° أوجد طول ا جـ

الحل

ا ب = ٦ م ، ق(∠ب) = ٦٠°

حاول تحلها حل جدا

اختبار على الوحدة الرابعة

س١: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① إذا كان ظا ٣س = $\sqrt{3}$ حيث ٣س زاوية حادة فإن ق(س) = ...
(٢٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

② في △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...
(٢ جا أ ، ٢ جا جـ ، ٢ جا ب ، ٢ جتا أ)

③ في △ أ ب جـ إذا كان ق(أ) : ق(ب) : ق(جـ) = ٣ : ٤ : ٥ فإن جتا ب = ...
(٠ ، $\frac{1}{2}$ ، ١ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

④ إذا كانت النقطة (٦ ، ٤) تحقق المعادلة ص = س جا ٣٠° + م فإن م = ...
(٤ ، ٦ ، ٨ ، ٢)

⑤ في المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين يكون ظل الزاوية الحادة مساويًا ....
($\sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ١ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

⑥ إذا كان ق(أ) = ٨٠° ، جا ب = جتا ب في △ أ ب جـ فإن ق(جـ) = ...
(٣٠° ، ٤٥° ، ٥٠° ، ٦٠°)

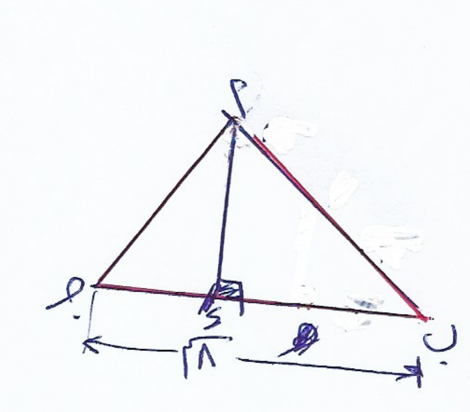
س٢: س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = $7\sqrt{3}$ ، س ص = $25\sqrt{3}$
أوجد قيمة ① ظا س × ظا ص ② جا س + جا ص

س٣: أوجد قيمة س

① س جا ٣٠° جتا ٤٥° = جا ٦٠°

② ٣ جا س = جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠°

س٤: في الشكل المقابل



△ أ ب جـ حاد الزوايا ، أ د ⊥ ب جـ

ب جـ = ٢٨ سم

أوجد جا ب + أ أ جـ جتا جـ

إختبار

١ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① إذا كان جتا ٢س = $\frac{1}{2}$ حيث (٢س) زاوية حادة فإن س = ... (١٥°، ٢٠°، ٣٠°، ٤٥°)

② إذا كان أب قطر في دائرة حيث أ(-١، ٥) ب(٣، ١) فإن إحداثي مركز الدائرة هو ......

(٢، ٦)   (١، ٣)   (٤، -٤)   (-٤، ٤)

③ ميل المستقيم ٣س - ٤ص + ١٣ = صفر هو ...... ($\frac{3}{4}$ ، $\frac{-3}{4}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{-4}{3}$)

④ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، -٢) ويوازي محور الصادات هي ......

س = ٣   ص = -٢   س = -٢   ص = ٣

⑤ إذا كان △أبجـ قائم الزاوية في ب فإن جتا أ + جا جـ = ... (٢ جتا جـ، ٢ جا ب، ٢ جا أ، ٢ جتا أ)

⑥ الأطوال التي تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية هي ......

٣، ٤، ٦   ٥، ١٢، ١٣   ٦، ٨، ٩   ٩، ٥، ١٤

٢ أ) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) وعمودي على المستقيم س + ٢ص - ٧ = صفر

ب) أثبت أن ٤ جا ٣٠° + ظا² ٤٥° = ظا² ٦٠° (بدون استخدام الآلة الحاسبة)

٣ أ) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ(٤، ٣) ب(-٣، ٢) جـ(٣، ٠) قائم الزاوية في جـ ثم أوجد إحداثيي الرأس د التي تجعل الشكل أبجـد مستطيلاً

ب) أوجد قيمة س إذا كان ٤س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°

٤ في الشكل المقابل

△أبجـ حاد الزوايا بجـ = $8\sqrt{2}$ سم، $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

أوجد قيمة أب جتا ب + أجـ جتا جـ

ب) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ(٣، ١) ، ب(١، ٢) يكون موازيا للمستقيم ٢س + ٤ص - ٣ = صفر

٥ أ) أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته

$$\frac{3س}{5} + \frac{ص}{2} = 2$$

ب) زاويتان أ، ب متتامتان النسبة بينهما ٢ : ١ أوجد جا أ + جتا ب

بالتوفيق

مهندسة/ هند أحمد